Geschichte

der

Breitengradmessungen

bis zur

peruanischen Gradmessung.

Eine von der philosophischen Facultät

der

Universität Rostock

genehmigte Promotionsschrift

von

Quodvultdeus Müller.

Rostock 1871.

Geschichte

der

Breitengradmessungen

bis zur

peruanischen Gradmessung.

Eine von der philosophischen Facultät

der

Universität Rostock

genehmigte Promotionsschrift

von

Quodvultdeus Müller.

Rostock 1871.

Druck von A. Neuenhahn in Jena.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553620_0165

Vorbemerkungen.

Bis auf die Zeiten Newton's und Huyghens' hielt man die Gestalt der Erde für kugelförmig und unter dieser Voraussetzung reichte es zum Zwecke der Ermittelung ihrer Grösse aus, einen einzigen Gradbogen zu messen*). Sobald man aber erkannt hatte, dass die Erde keine Kugel sei, sondern dass ihre Gestalt einem Ellipsoide sehr nahe komme, welches durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entsteht, war man gezwungen, wenn man mit der Grösse zu-

*) Im Alterthume waren die Ansichten über die Gestalt der Erde sehr getheilt. So schreibt Cleomedes, der einzige Gewährsmann für die von Eratosthenes und Posidonius ausgeführten Gradmessungen, in seiner „κυκλικὴ θεωρία μετεώρων" I, 8 hierüber: *Πλείους τοίνυν διαφοραὶ περὶ τοῦ κατὰ τὴν γῆν σχήματος παρὰ τοῖς παλαιοτέροις τῶν φυσικῶν γεγόνασιν. Οἱ μὲν γὰρ αὐτῶν αὐτῇ τῇ κατὰ τὴν ὄψιν ψαντασίᾳ κατακολου — θήσαντες, πλατεῖ καὶ ἐπιπέδῳ τῷ σχήματι κεχρῆσθαι αὐτὴν ἀπεφήναντο. Ἕτεροι δὲ ὑπονοήσαντες ὅτι μὴ ἂν διέμενε τὸ ὕδωρ ἐπ' αὐτῆς, εἰ μὴ βαθεῖα καὶ κοίλη τὸ σχῆμα ἦν, αὐτῷ τούτῳ κεχρῆσθαι τῷ σχήματι ἔφασαν αὐτήν. Ἄλλοι δὲ κυβοειδῆ καὶ τετράγωνον εἶναι αὐτὴν ἀπεφήναντο· τινὲς δὲ πυραμοειδῆ.* — Die Pythagoreer scheinen zuerst die sphärische Gestalt der Erde geahnt zu haben und ziemlich sicher lässt sich annehmen, dass vom vierten Jahrhunderte vor Christi Geburt an an der Kugelgestalt der Erde nicht mehr gezweifelt wird.

gleich auch die Gestalt der Erde ermitteln wollte, zwei Gradmessungen unter verschiednen Breitengraden anzustellen. Hat nämlich von zwei Breitengraden der in der Nähe des Pols gemessne eine grössere Ausdehnung als der in der Nähe des Aequators gemessne, so ist dadurch die Axenverschiedenheit, also die Abplattung der Erde nachgewiesen.

Solcher Breitengradmessungen, welche unter der Voraussetzung gemacht wurden, dass die Erde kugelförmig sei, hat die Geschichte der Gradmessung sehr viele zu verzeichnen, von Eratosthenes an, welcher die erste wirkliche Breitengradmessung anstellte, bis in die neuere Zeit, bis zu Cassini und Lahire, und besonders durch französische Astronomen ist unter jener Annahme die Grösse der Erde bestimmt worden.

Newton und Huyghens hatten auf theoretischem Wege gefunden, dass die Erde gegen die Pole hin abgeplattet sein müsse. Das Pendel bestätigte diese Behauptung, da es nahe am Aequator verkleinert, nahe an den Polen dahingegen verlängert werden musste, um gleichschnell zu schwingen. Merkwürdigerweise jedoch ergab die gegen 1718 beendete Fortsetzung der von Picard seit 1683 ausgeführten Gradmessung durch Cassini und Lahire das Resultat, dass die Erde an den Polen zugespitzt sei, ein Resultat, welches, obgleich den Gesetzen der Hydrostatik wahrhaft Hohn sprechend, doch lange Zeit hindurch von der Pariser Academie der Wissenschaften gegen die Behauptung Newton's vertheidigt wurde*).

---

*) Memoiren der Pariser Acad. v. J. 1720 „sur l'inégalité des degrés de latitude terrestres et sur celle du pendule à secondes, ou sur la figure de la terre": „La diminution des degrés de latitude terrestres de l'Equateur vers les Pôles admise pour certaine, donne necessairement à la Terre en repos la figure actuelle d'un Spheroïde oblong. C'est une proposition fondamentale que M. de Mairan a démonstrée et qui est une Clef de toute cette Théorie. D'un autre côté le movement de révolution sur l'axe de l'Equateur survenant à la Terre, ne fera que changer ce Spheroïde oblong en un moins oblong. Ainsi les Observations astro-

Als man jedoch das sicherste Mittel, welches zur gewissen Lösung der Streitfrage auf empirischem Wege führen konnte, ergriff, nämlich zwei Meridianbögen zu messen, und zwar den einen nahe am Aequator (in Peru), den andern im hohen Norden (in Lappland), da schwanden alle Zweifel über die wahre Gestalt unseres Planeten und man erkannte seitdem, dass derselbe an den Polen abgeplattet sei.

Durch die Vervollkommnung der Instrumente bewogen und gleichzeitig die Absicht hegend, ein Naturmass *) festzu-

---

nomiques de la diminution des degrés, et les experiences de l'accourcissement du Pendule s'accorderont aisément, car il est visible, que les Cercles parallèles et inégaux, qui formeront le Spheroïde oblong, croissant toûjours des Pôles vers l'Equateur, la force centrifuge croîtra toûjours aussi en même sens, et diminuant toûjours l'action de la Pesanteur sur les Corps, rendra leur poids moindre sous l'Equateur, et y causera l'accourcissement du Pendule."

„Ainsi l'accourcissement du Pendule sous l'Equateur s'accorde tant avec l'hipotèse de la Pesanteur variable qu' avec celle du Spheroïde oblong."

*) Ueber den illusorischen Werth eines Naturmasses, ja, über die Unerreichbarkeit desselben bemerkt Bessel in seinen populären Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände (nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Schumacher, Hamburg 1848): „Wenn die Natur einen Körper hervorbrächte, welcher in allen Fällen, in welchen er sich zeigt, stets eine gleiche Abmessung besässe, so ist kaum zu bezweifeln, dass man bei der bestehenden Willkür der Wahl des Masses, diese Abmessung zum Masse der Längen gemacht haben würde. Wären alle seine Abmessungen in allen Fällen gleich, so würde er auch ein natürliches Körpermass darbieten. Besässe er noch dazu in allen Fällen gleiche Dichtigkeit seiner Materie, so würde seine Masse auch die natürliche Gewichtseinheit darstellen. Allein man kennt keinen Körper, welcher diese drei Eigenschaften, oder auch nur eine davon, darböte; also auch keinen, durch welchen man unmittelbar messen und wägen könnte. Will man dennoch ein Naturmass, so kann man es also nur durch Messung des Gegenstands, von welchem es hergenommen werden soll, erlangen." — Und weiterhin: „Da wir aber keine Grösse durch Messung oder Beobachtung kennen lernen, sondern uns ihr dadurch nur nähern können, so erfüllt das durch Messung zu erlangende Naturmass nie die erste der Forderungen, welche ein Mass erfüllen soll, nämlich die,

stellen, ein Mass also, welches sich bei etwaigem Verluste stets wieder auffinden lassen könnte, liess die Pariser Academie durch Méchain und Delambre eine Gradmessung zwischen Dünkirchen und Barcelona ausführen (seit 1792), eine Gradmessung, welche zu Anfang unsers Jahrhunderts durch Biot und Arago bis zur Insel Formentera fortgesetzt wurde. Die Resultate der durch Méchain und Delambre ausgeführten Arbeiten sind in dem umfangreichen Werke „Base du système métrique décimal" enthalten und wurden dieselben in Verbindung mit den durch Biot uud Arago gefundenen als allein gültig angesehen, bis nachgewiesen wurde, dass man sich bei Berechnung des Meridianbogens zwischen Barcelona und Formentera um ungefähr 133m getäuscht habe.

Die Wege, welche man zur Ermittelung der Grösse der Erde eingeschlagen hat, laufen alle darauf hinaus, ein Stück eines grössten Kreises der Erde zu messen und gleichzeitig den

an sich selbst jede Unbestimmtheit auszuschliessen. Sowie man aber ein bestimmtes Mass, dem Resultate einer Messung entsprechend, also eine materielle Darstellung dieses Resultats, einführt und für die Folge geltend macht, leistet man ebendadurch auf das Naturmass Verzicht. Ferner bemerkt Bessel über die Herleitung des Naturmasses (Meter) aus der Messung des Erdquadranten: „Die hier an einem Beispiele (Huyghens empfahl die Länge des einfachen Secundenpendels als Einheit des Längenmasses) erläuterten Schwankungen eines aus Messungen abzuleitenden Naturmasses müssen immer hervortreten, welches auch der zu messende Gegenstand sein möge. Sie fehlen also auch nicht in dem aus dem Quadranten der Erdmeridiane abgeleiteten Meter; vielmehr kommt hier noch zu der in der Unvollkommenheit der Messungen begründeten Ursache derselben eine zweite, nämlich die Unbestimmtheit des zu messenden Gegenstands, hinzu. Diese geht aus der Unmöglichkeit hervor, auf einem Meridiane der Erde von dem Aequator zu einem ihrer Pole zu gelangen, wodurch die Erfindung der Entfernung beider von einander auf einen Schluss von einzelnen gemessnen Bögen des Meridians auf die Länge seines Quadranten verwiesen wird, welcher nur durch die Voraussetzung der Kenntniss der Figur der Meridiane möglich wird." —

Winkel zu ermitteln, welcher diesem Stücke am Mittelpunkte der Erde entsprach. Unter der Voraussetzung, dass die Erde Kugelgestalt besitze, konnte man dann sehr leicht ihren Umfang ermitteln. Schon frühe verfiel man auf den Gedanken, dieses Stück eines grössten Kreises so zu wählen, dass dasselbe in einen Meridian fiel, weil dann der jenem am Mittelpunkte der Erde entsprechende Winkel gleich dem Unterschiede der Polhöhen des Anfangs- und Endortes war. Die Messung des betreffenden Meridianstücks führte man lange Zeit hindurch direct aus, bis der Holländer Snellius zuerst (1615) eine bessere Methode — die Triangulationsmethode — in Anwendung brachte. Das hierbei beobachtete Verfahren besteht darin, dass man das seiner Grösse nach zu ermittelnde Bogenstück durch ein Netz von Dreiecken mit einer kürzeren in Bezug auf das Terrain zu derartigen Zwecken günstig gelegenen Linie, der sogenannten Basis in Verbindung bringt, nur die Grösse dieser Basis durch directes Messen ermittelt und in den Dreiecken dann nur die Winkel beobachtet, was ja bekanntlich mit ausserordentlicher Schärfe geschehen kann. Ausserdem reducirt man jetzt diese Winkel wegen der ungleichen Höhe der Beobachtungsorte über dem Meere auf das Meeresniveau; denn „die mit nicht strömendem Wasser bedeckte Oberfläche der Erde ist die mathematische Figur derselben“ (Alexander v. Humboldt).

I.

Die von den Alten herrührenden Angaben in Bezug auf die Grösse der Erde.

A. Aristoteles.

Die erste bestimmte Zahlenangabe über die Ausdehnung unseres Planeten finden wir bei Aristoteles. Derselbe spricht in seinem Werke „*περὶ οὐρανοῦ*“ lib. II cap. XII folgendermassen:

„*Καὶ τῶν μαθηματικῶν ὅσοι τὸ μέγεθος ἀναλογίζε-*
„*θαι πειρῶνται τῆς περιφερείας, εἰς τετταράκοντα*
„*εἶναι μυριάδας* (sc. *σταδίων*)“.

Wer jedoch jene Mathematiker sind, erwähnt Aristoteles nicht. Es ist überhaupt nicht von einer bestimmten Messung, nur von einer ungefähren Schätzung die Rede (*πειρῶνται, εἰς*). Schwerlich lassen sich diese Worte auf Anaximander (Schüler des Thales) beziehen, von welchem zwar (Diog. Laërt. de vit. Phil. L. II § 2) gesagt wird „*γῆς καὶ θαλάσσης περίμετρον πρῶτος ἔγραψεν*“, jedoch ist hierbei nicht an eine Messung zu denken, sondern Strabo (L. I. c. 1. pag. 10

editio Tauchnitiana) erzählt *„τοῦτον ἐκδοῦναι πρῶτον γεωγραφικὸν πίνακα.“*

Auch der Tarentiner Archytas unternahm wohl keine Messung der Erde, wie man aus jener Stelle des Horaz (L. I od. 28) hat folgern wollen:

„Nec quidquam tibi prodest
„Aerias tentasse domos animoque rotundum
„Percurisse polum, morituro.“

Das Präsens *πειρῶνται* jenes angeführten aristotelischen Ausspruches deutet vielmehr auf Zeitgenossen des Aristoteles hin, von welchen die ungefähre Schätzung ausging, wie etwa auf Callipus, Eudoxus etc.

Bei der Zahl 400000 fehlt im Texte jedwede Benennung. Unter der von jeher gemachten Voraussetzung, dass das Wort *σταδίων* supplirt werden müsse (Riccioli, Geographia reformata V, 1 gebraucht das Wort, ohne zu bemerken, dass es ergänzt sei), handelt es sich nun darum, zu entscheiden, welche Grösse ein solches Stadium gehabt hat. — Behufs dieser Entscheidung ist es nöthig, sich zu vergegenwärtigen, in welcher Weise die Alten grössere Entfernungen zu bestimmen suchten und dieselben sich so zum Bewusstsein brachten. Man war gewohnt, den Raum theils durch Ausschreiten, theils nach der Zeit zu bestimmen, welche man brauchte, um ihn zurückzulegen, wie z. B. nach Tagereisen, nach Tagesmärschen eines Heeres oder nach Tag- und Nachtfahrten eines Schiffes. Dass diese Bestimmungsweise der Entfernung ziemlich ungenau und unbestimmt war, leuchtet leicht ein; denn so schreibt noch Strabo (Lib. II pag. 200, edit. Tauchnit.) *„Ἔστι δ' ἀπὸ Ῥόδου δίαρμα εἰς Ἀλεξάνδρειαν βορέᾳ τετρακισχιλίων που σταδίων.“* — Derartige Schätzungen drückte man nun weiterhin in einer bestimmten runden Anzahl von Stadien aus, da ein Jeder sich die ungefähre Länge einer Rennbahn vorstellen konnte. Herodot beispielsweise schätzt eine Tage-

reise zu 200 Stadien, den Tagesmarsch eines Heeres zu 150 St., die Tagesfahrt eines Schiffes zu 700, die Nachtfahrt zu 600 Stadien (cf. Uckert, Geographie der Griechen und Römer, pag. 56—58).

Wenn man eine solche in Stadien gegebene Strecke nachrechnen will, so ist es nöthig, von einer bestimmten Längeneinheit auszugehen, wenngleich, wie gesagt, angenommen werden muss, dass es zu jener Zeit noch kein genau bestimmtes und allgemein anerkanntes Längenmass gegeben hat.

Diese Längeneinheit ist nun von jeher das sogenannte olympische Stadium gewesen und besonders deutsche Gelehrte haben sich jeder Annahme eines anderen Stadiums widersetzt und jene Hypothese einiger Franzosen (Fréret, Gosselin) mit Entrüstung zurückgewiesen, nach welcher der Grund der grossen Verschiedenheit jener Zahlenangaben der Alten über die Grösse der Erde nicht in der rohen und unzuverlässigen Bestimmungsweise derselben zu suchen sei, sondern vielmehr in der Anwendung verschiedener Stadien liege.

Hultsch (griechische und römische Metrologie, Berlin 1862) beschäftigt sich sehr eingehend mit einer Untersuchung über das olympische Stadium und gelangt dabei im Wesentlichen zu folgenden Resultaten:

1. Das sogenannte olympische Stadium, welches bekanntlich $^1/_8$ römische Meile betrug und daher mit Sicherheit zu 185 Meter $= {}^1/_{40}$ geogr. Meile berechnet ist, ward erst später eine feste Grösse und erhielt noch später den Namen des olympischen Stadiums.

Dieser Name schreibt sich aus einer confusen Stelle*)

*) Diese Stelle lautet: nam ut Eratosthenes geometrica ratione collegit maximum terrae circuitum esse stadiorum ducentum quinquaginta duum milium, ita Pythagoras, quot stadia inter terram et singulas stellas essent, indicavit. Stadium autem in hac mundi mensura id potissimum intelligendum est, quod Italicum vocant, pedum sexcentorum viginti

des Censorinus (geschrieben 238 n. Chr.) her, welche weit entfernt davon, zur Förderung der Untersuchung beizutragen, im Gegentheile vielmehr schlechterdings nicht zu gebrauchen ist, da man durch sie nur auf Widersprüche geräth.

2. Obwohl nach der allgemeinen Tradition die Begründung des Stadiums nach Olympia verlegt wird und dieser Name daher dem Achtelmeilenstadium belassen werden kann, so hat doch kein Grieche je ein Längenmass unter dem Namen des olympischen gekannt.

Da nun die olympische Rennbahn die grösste Griechenlands war, so fragt es sich, ob die Nachrechnung der von den Griechen abgeschätzten Entfernungen anstatt mit dem später erst zur festen Grösse gewordenen olympischen nicht vielmehr mit einem kürzeren Stadium zu geschehen habe. Es ist in der That kein Grund vorhanden das olympische Stadium anzuwenden, wenn man sich eine ungefähre Vorstellung jenes Werthes von 400000 Stadien, welchen Aristoteles für den Erdumfang giebt, machen will. Hultsch bemerkt, dass man das Stadium jedenfalls in einem bequemen Verhältnisse auf das Schrittmass geradezu reducirt habe. Er rechnet demzufolge 200 Schritte auf das Stadium, den Schritt zu $0^{m}8$ oder 2.′55 preuss., woraus sich zunächst ein Stadium von 510′ preuss. ergiebt. Unter Anwendung der Regel, dass je grösser die Ungenauigkeit, desto mehr die Entfernung überschätzt wurde, bestimmt er endlich dieses Itinerar- oder Schrittstadium zu 470′ preuss. $= {}^{1}/_{50}$ geogr. Meile.

Man kann nun, da selbst eine entfernte Genauigkeit keineswegs zu erreichen ist, das Stadium = 500′ pr. setzen, d. i. ungefähr ${}^{1}/_{47}$ geogr. Meile (die Meile zu 23600′ gerechnet), und annehmen, diese Zahl könne noch um 30′, d. i. um ungefähr

---

quinque nam sunt praeterea et alia longitudine discrepantia; ut Olympicum, quod est pedum sexcentum, idem Pythicum pedum ∞.

$^1/_{17}$ des Werths falsch sein. Dann sind 400000 Stadien etwa 8500 geogr. Meilen und diese Zahl könnte noch um 500 Ml. auf- und abwärts schwanken, was um etwa $^5/_9$ des wirklichen Umfangs zu gross ist.

B. Aristarch von Samos.

Für die folgenden Erdmessungen von Wichtigkeit wird Aristarch von Samos (um 250 v. Chr.) und zwar durch die Einführung der Skaphe. Hatte man sich vorher des Gnomons bedient, um durch Richtung und Länge seines Schattens die Tagesstunden bestimmen zu können, so brachte Aristarch den Stift in einer aus Erz oder Stein gefertigten Halbkugel an, in welcher jedenfalls auch eine Kreistheilung sich befand, so dass die Zenithdistanz der Sonne direct als Bogen abgelesen werden konnte und sich an den beiden Tagen der Aequinoctien die geographische Breite sofort ergab. Cleomedes nennt dies Instrument ὡρολογεῖον oder σκιοθηρικόν.

C. Archimedes.

Eine zweite ebenso unsichere Angabe über die Grösse unseres Planeten wie Aristoteles giebt Archimedes in seiner Sandrechnung (Ψαμμίτης). Er spricht davon, dass Etliche zu zeigen versucht hätten, der Erdumfang habe etwa 300000 Stadien. Der Ursprung dieser Zahl ist zweifelhaft, jedoch erwähnt Archimedes unmittelbar vorher und nachher den Aristarch und Eudoxus, so dass angenommen werden muss, dass jene Zahlenangabe von diesen Astronomen herrührt. Man sieht, dass Archimedes, welcher diese Zahl verzehnfacht, damit man ihm nicht beschuldigen könne, er habe seiner Berechnung der Menge von Sandkörnern, welche die Erdkugel

ausfüllen würden, eine zu kleine Zahl zu Grunde gelegt, immer von einem von ihm selbst zu hoch gehaltnen Maximum spricht, wenigstens deutet das überall eingeschaltete *καὶ μὴ μείζω* darauf hin.

D. Cleomedes.

In dem Werke des Cleomedes*) „*κυκλικὴ θεωρία μετεώρων*“ I, 8 findet sich eine Stelle, in Bezug auf welche es sehr schwer zu entscheiden ist, ob jene nach Archimedes von andern Mathematikern herrührende Zahl zu derselben irgend welche Beziehung hat. Diese Stelle ist folgende:

„*Καὶ μὴν εἰ πλατεῖ καὶ ἐπιπέδῳ τῷ σχήματι ἐκέχρητο ἡ γῆ, δέκα μυριάδων ἡ ὅλη ἂν τοῦ κόσμου διάμετρος ἦν. Τοῖς μὲν γὰρ ἐν Συσιμαχίᾳ κατὰ κορυφὴν ἐστιν ἡ τοῦ Δράκοντος κεφαλή· τῶν δὲ ἐν Συήνῃ τόπων ὑπέρκειται ὁ Καρκῖνος. Τοῦ δὲ διὰ Συσιμαχίας καὶ Συήνης ἥκοντος μεσημβρινοῦ πεντεκαιδέκατον μέρος ἐστίν, ἡ ἀπὸ τοῦ Δράκοντος μέχρι Καρκίνου περιφέρεια, ὡς γε διὰ τῶν σκιοθηρικῶν δείκνυται. Τὸ δὲ τοῦ ὅλου κύκλου πεντεκαιδέκατον, πέμπτον τῆς διαμέτρου γίνεται. Ἂν τοίνυν ἐπίπεδον ὑποθέμενοι τὴν γῆν, καθέτους ἐπ' αὐτὴν ἀγάγωμεν ἀπὸ τῶν ἄρκων τῆς περιφερείας τῆς ἀπὸ τοῦ Δράκοντος ἐπὶ Καρκῖνον ἡκούσης, ἐφάψονται τῆς διαμέτρου ἢ διαμετρεῖ τὸν διὰ Συήνης καὶ Συσιμαχίας μεσημβρινόν. Ἔσται οὖν τὸ μεταξὺ τῶν καθέτων, μυριάδων δύο. δισμύριοι γὰρ ἀπὸ Συήνης εἰς Συσιμαχίαν στάδιοι. Ἐπεὶ οὖν πέμπτον τῆς*

*) Es ist zweifelhaft, wenn Cleomedes lebte. Nur so viel ist gewiss, dass er Stoiker war. Sein erster Commentator Rob. Balforeus sagt, dass er nach Posidonius († 60 v. Chr.) gelebt haben müsse, da er dessen Gradmessung berichte und setzt ihn, weil er die Lehren des Almagest noch nicht kenne, kurz vor oder gleichzeitig mit Ptolemaeus, welcher 70—147 n. Chr. lebte.

ὅλης διαμέτρου τοῦτο τὸ διάστημα, δέκα μυριάδων ἡ ὅλη τοῦ μεσημβρινοῦ διάμετρος γενήσεται. Δέκα δὲ μυριάδων τὴν διάμετρον ἔχων ὁ κόσμος, τὸν μέγιστον ἕξει κύκλον μυριάδων λ΄. Πρὸς ὃν ἡ γῆ μὲν στιγμιαία οὖσα, πέντε καὶ εἴκοσι μυριάδων σταδίων ἐστίν. Ὁ δὲ ἥλιος ταύτης πολυπλασίων ἐστὶν, ἐλάχιστον τοῦ οὐρανοῦ μέρος ὑπάρχων. Πῶς οὖν οὐχὶ καὶ τούτων φανερὸν, διότι μὴ οἷόν τε ἐπίπεδον εἶναι τὴν γῆν.“

Von einer eigentlichen Gradmessung ist in dieser Stelle nicht die Rede, sondern nur von der Gestalt der Erde. Der von Cleomedes geführte indirecte Beweis für deren Kugelgestalt ist jedoch nicht streng durchgeführt; denn wenn er von der Verneinung der Behauptung. die Erde besitze Kugelgestalt, ausgeht und sich also die Erde als Ebene denkt, so darf er sich nicht einer auf die Kugelgestalt gegründeten Gradmessung zum Beweise bedienen.

Wie es scheint, hat Cleomedes die in der angeführten Stelle enthaltne Schlussfolgerung selbst gemacht und die dazu nöthigen Daten einer wirklich ausgeführten Messung, deren Autor er jedoch verschweigt, entnommen. Diese Messung ist aber dann entschieden jünger als der von Aristoteles angeführte Versuch, die Dimensionen der Erde zu bestimmen; denn die Stadt Lysimachia in Thracien ist erst 309 gegründet und Aristoteles starb 323 oder 322 v. Chr.

Da die ganze aus Cleomedes' Worten zu entnehmende Gradmessung an sich Hypothese ist, und ausserdem ihre Daten ziemlich fehlerhaft und ungenau sind, so möge dieselbe hier nicht weiter discutirt werden.

E. Eratosthenes.

Eratosthenes unternahm in der zweiten Hälfte des dritten Jahrhunderts eine Gradmessung, welche Cleomedes

in seinem Werke „*κυκλικὴ θεωρία μετεώρων*“ I, 10 ausführlich bespricht. (Eratosthenes, 276 v. Chr. in Cyrene geboren, wurde durch Ptolomaeus III. Euergetes von Athen nach Alexandria als Bibliothekar berufen, woselbst er, weil ihm das Augenlicht schwand, im 80. Lebensjahre 196 v. Chr. den freiwilligen Hungertod wählte). Diese Gradmessung beruht auf einer vollständig richtigen Theorie, ist aber, wie sich nicht anders erwarten lässt, mit verschiednen Beobachtungsfehlern behaftet, welche im Folgenden besprochen werden sollen.

Eratosthenes mass zwischen den Städten Alexandrien und Syene in Aegypten, von denen er glaubte, dass sie nahe unter demselben Meridiane lägen („*ὑπὸ τῷ αὐτῷ κεῖσθαί φησι μεσημβρινῷ Συήνην καὶ Ἀλεξάνδρειαν*“). Da er fernerhin wusste, dass am Tage des Sommersolstitiums während des Mittags die Körper zu Syene keinen Schatten warfen, so schloss er daraus, dass dieser Ort unter dem Wendekreise des Krebses liegen müsste („*φησὶ τοίνυν, καὶ ἔχει οὕτως, τὴν Συήνην ὑπὸ τῷ θερινῷ τροπικῷ κεῖσθαι κύκλῳ*“). Daher gab ihm die Sonnenhöhe an diesem Tage, welche er zu Alexandrien beobachten konnte, die Breitendifferenz der beiden Orte oder die Anzahl der Grade des Meridianstücks zwischen den Parallelkreisen derselben („*ἐν Ἀλεξανδρείᾳ δὲ τῇ αὐτῇ ὥρᾳ ἀποβάλλουσιν οἱ τῶν ὡρολογείων γνώμονες σκίαν*“ — „*ὃν ἄρα λόγον ἔχει ἡ ἐν τῇ σκάφῃ πρὸς τὸν οἰκεῖον κύκλον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον καὶ ἡ ἀπὸ Συήνης εἰς Ἀλεξάνδρειαν ἥκουσα. Ἡ δέ γε ἐν τῇ σκάφῃ πεντηκοστὸν μέρος εὑρίσκεται τοῦ οἰκείου κύκλου. Δεῖ οὖν ἀναγκαίως καὶ τὸ ἀπὸ Συήνης εἰς Ἀλεξάνδρειαν διάστημα, πεντηκοστὸν εἶναι μέρος τοῦ μεγίστου τῆς γῆς κύκλου*“). Diese Breitendifferenz betrug 7^{0} $12'$ oder den 50. Theil vom Erdumfange. Da nun Eratosthenes aus den Angaben von Reisenden wusste, dass die Entfernung von Alexandrien und Syene 5000 Stadien war, so fand er den Umfang der Erde zu 250000 Stadien („*καί ἐστι τοῦτο*

— sc. *τὸτὸ ἀπὸ Συήνης εἰς Ἀλεξάνδρειαν διάστημα — σταδίων πεντακισχιλίων. Ὁ ἄρα σύμπας κύκλος γίνεται μυριάδων εἴκοσι πέντε*“).

Was nun zunächst die Behauptung des Eratosthenes anbelangt, Syene und Alexandrien lägen unter demselben Meridiane, so konnte er für dieselbe natürlicherweise einen Beweis nicht liefern; denn die Alten kannten zu jener Zeit noch kein Mittel, auf weite Entfernungen hin die unter demselben Meridiane liegenden Orte zu bestimmen.*) Selbst Hipparch jedoch hielt die Angabe noch für richtig und erst bei Ptolemaeus finden wir angegeben, dass Syene und Alexandrien nicht auf demselben Meridiane liegen, und zwar giebt derselbe zwischen beiden Orten einen Längenunterschied von $1^1/_2{}^0$. Dieser ist jedoch doppelt so gross; denn die Länge (von Ferro) nach Nouet für Syene ist 50° 34′ 49″, die für Alexandrien (Connaiss. d. Temps, 1856) 47° 32′ 35″, so dass also ein Längenunterschied von 3° 2′ 14″ resultirt.

Weiterhin haben wir unser Augenmerk auf die Behauptung des Eratosthenes, Syene liege unter dem Sommerwendekreise, zu richten (Cleom. „Er sagt also, und so verhält es sich auch, Syene liege unter dem Sommerwendekreise“). Der Abstand der Wendekreise vom Aequator, d. h. die Schiefe der Ekliptik, jetzt ungefähr $23^1/_2{}^0$ (genau 23° 27′ 22″.99), war um das Jahr 240 v. Chr. $23^0\ 44^1/_2{}'$. Um nun zu untersuchen, wie dieses aus den Formeln der heutigen Astronomie gewonnene Resultat mit den Ansichten des Eratosthenes übereinstimmt, so handelt es sich zunächst um die Beantwortung der Frage, ob die Alten bereits eine so genaue Kreiseintheilung kannten,

*) Eratosthenes hatte ausser diesem durch Syene und Alexandrien gehenden Meridiane noch 6 andre gezogen, und zwar durch die Säulen des Herkules, durch Karthago, durch Thapsakus am Euphrat, durch die Kaspischen Pforten, durch die Mündung des Indus und durch die des Ganges (Forbiger, Handbuch der alten Geographie).

dass von Graden und Minuten gesprochen werden kann. Bereits in der ältesten ägyptischen Astrologie finden wir eine Theilung des Zodiakus in 360 Theile (Julius Firmicus Maternus). Diese Zahl ergab sich auf ziemlich natürliche Weise; denn sie ist das arithmetische Mittel zwischen dem Sonnenjahre (365 oder 366 Tage) und dem Mondjahre (354 Tage — 12 synodische Umläufe —) (cf. Riccioli „Almagestum novum" tom. I, lib. I, cap. V). Obschon somit der ganze Umfang in 360 Theile getheilt erscheint, so wurde dies doch bis auf Ptolemaeus nie hervorgehoben; die kleineren Theile wurden selbstständig gebraucht, ohne dass man ihrer Beziehung zum Ganzen gedachte; denn die Alten waren nicht gewohnt, in kleineren Massen Bruchtheile höherer Einheiten zu erblicken. Somit ward die Eintheilung des Zodiakus nicht auf jeden Kreis übertragen, sondern sie blieb nur für die Astrologie im Gebrauch.

Es ist jedenfalls als sicher anzunehmen, dass zur Zeit des Eratosthenes eine Eintheilung des Kreises in 60 gleiche Theile üblich war (Schaubach — „Geschichte der griechischen Astronomie" — „Diese Eintheilung gehört mit zu den ältesten, weil sie aus der eines Sechsecks entsteht, worauf man gleich anfänglich verfiel"). Achilles Tatius (890 n. Chr. Bischof von Alexandria) bezeugt (cf. Ukert „Geogr. d. Griech. und Römer" und Forbiger), dass Eudoxus und Hipparch sicherlich diese Art der Kreiseintheilung hatten. Auch Geminus (um 66 v. Chr.) sagt noch, dass der Meridian in 60 Theile getheilt werde (cf. Ukert), dahingegen zerfällt ihm der Zodiakus in 12 Bilder, von denen jedes 30 Theile (*τμήματα*) hat. — In dieselbe Zeit fällt Strabo (66 v. bis 24 n. Chr.), welcher zwar mit Eratosthenes und Hipparch den Umfang in Sechzigstel (*ἑξηκοντάδες*) eintheilt, jedoch weiterhin auch davon spricht, dass, wenn man den grössten Kreis der Erde in 360 Abschnitte (*τμήματα*) eintheilt, jeder dieser Ab-

schnitte 700 Stadien haben werde und dass sich Hipparchos dieses Masses bediente. Hieraus schliesst Ukert, dass die weitere Zerlegung der Sechzigstel behufs grösserer Schärfe in je 6 Theile, also die Theilung des Kreises in 360 Grade durch Eratosthenes oder Hipparch eingeführt zu sein scheine. — Es steht also fest, dass zur Zeit des Eratosthenes die Mathematiker den Kreis in 60 gleiche Theile zu zerlegen pflegten und dass sich auch Hipparch noch wesentlich dieser Eintheilungsweise bediente. Dieser scheint jedoch, wie eben erwähnt, der grösseren Genauigkeit wegen jedes der Sechzigstel weiterhin in 6 Abschnitte zerlegt zu haben. Noch um Christi Geburt sind die Schriftsteller unsicher im Gebrauche dieser Eintheilung und erst Ptolemaeus wendet sie durchgehends an, indem er ausserdem noch den Grad in Minuten und Secunden theilt.

Um nun die zweite Prämisse der Eratosthenischen Gradmessung, Syene liege unter dem Sommerwendekreise, weiterhin zu discutiren, so ist weniger darauf hinzuweisen, dass diese Annahme falsch ist (und dies zwar nur um wenig), als vielmehr darauf, dass Eratosthenes den mathematischen und astronomischen Kenntnissen seiner Zeit gemäss mit vollem Rechte diese Behauptung aufstellte.

Sobald man erkannt hatte, dass die Erde Kugelgestalt besitze, hatte man die am Himmel aufgefundnen und bestimmten Kreise so genau wie möglich auf die Erde übergetragen und hatte dieselbe somit in Zonen eingetheilt. Da nun Eratosthenes den Meridian in 60 Theile theilt, so kommen auf den Meridianquadranten 15 solcher Theile und davon theilt Eratosthenes vier dem Bogen vom Aequator bis zum Sommerwendekreise zu, d. h. also, er giebt diesen Abstand zu 24° an (cf. Strabo). Er nimmt also die geographische Breite von Syene zu 24° an und somit ist der Fehler ziemlich klein; denn nach de la Nauze (Mém. d. litt., Acad. des inscr., t. 26

(1759) ist die Breite von Syene 23° 59′ 20″, nach Nouet 24° 5′ 23″.

Wie schon oben bemerkt, schloss Eratosthenes und mit ihm das Alterthum daraus, dass verticale Körper zu Syene zur Zeit des Sommersolstitiums des Mittags keinen Schatten warfen und ausserdem daraus, dass um dieselbe Tageszeit ein in Syene befindlicher senkrechter Brunnen bis auf den Grund von der Sonne erleuchtet wurde, dass Syene unter dem Wendekreise des Krebses liege und da diese Ansicht, wie gesagt, im Alterthume die gültige war, so hat sich Eratosthenes derselben mit vollem Rechte bedient, um auf ihr als Grundlage eine Gradmessung aufzubauen.

Die dritte Prämisse der Eratosthenischen Gradmessung lautet: „In Alexandria werfen um dieselbe Stunde die Gnomonen einen Schatten . . . . Dasselbe Verhältniss, welches der Bogen (sc. Schattenbogen) zu seinem Kreise hat, muss auch der Bogen zwischen Alexandria und Syene (sc. zum Erdumfange) haben. Jener Bogen in der Skaphe aber ergiebt sich als der 50. Theil seines Kreises, also muss nothwendig der Abstand zwischen Syene und Alexandria der 50. Theil des grössten Kreises der Erde sein.“

In Bezug hierauf ist der Fehler des Eratosthenes sehr verschieden beurtheilt worden. Entweder hat man bei der Beurtheiluug dieser Prämisse die wahre Breite von Alexandria um die wahre oder um die von Eratosthenes angenommene Schiefe der Ekliptik, oder um die wahre oder um die von Eratosthenes angegebene geographische Breite von Syene vermindert. Das einzig Richtige scheint jedoch zu sein, die damalige wahre Schiefe der Ekliptik zu benutzen; denn Eratosthenes hatte mit dem Gnomon zu Alexandrien beobachtet und hier die Zenithdistanz der Sonne gefunden, so dass also diese Beobachtung ganz unabhängig ist von dem über Syene ausgesprochenen Satze.

Eratosthenes bestimmt die Breite Alexandriens zu 31° 12′; denn er sagt, dass der Abstand zwischen dem von ihm in 24° Breite gesetzten Syene und Alexandrien der 50. Theil des grössten Kreises der Erde sei, d. h. also, dass dieser Abstand 7° 12′ sei. Die Breite Alexandriens wird nun von Nouet und Daussy (cf. Conn. d. Temps, 1856) zu 31° 12′ 53″ bestimmt, und zwar für den in das Meer hinausgebauten „Pharus". Wie Forbiger (a. a. O. p. 183, Nota) meint, lag jedoch der Ort, an welchem Eratosthenes beobachtete 48″ südlicher, am grossen Hafen, so dass jeder Fehler fast verschwinden würde. Jedoch liegt der eigentliche Fehler, welchen Eratosthenes machte, darin, dass die Sonne nicht 24°, sondern 23° 44¹/₄′ Declination hatte und demzufolge in der Skaphe ein Bogen von ungefähr 7° 27′ hätte abgelesen werden müssen. Der eigentliche Fehler, welchen Eratosthenes beging, war also der, dass er ungefähr 15′ zu wenig beobachtete. — Aus der Berechnung des sphärischen Dreiecks Pol — Alexandria — Syene ergiebt sich nun weiterhin jener Bogen zwischen Syene und Alexandrien zu fast 7° 36′, also die directe Entfernung zu 114 geogr. Meilen, welcher Bogen fast der 47. Theil des Erdumfangs ist.

Endlich sagt Eratosthenes: „Die Entfernung der beiden Städte beträgt 5000 Stadien. Der ganze Umfang ist also 250000." Zunächst soll hier der auffallenden Thatsache gedacht werden, dass ausser Cleomedes, welcher der einzige Gewährsmann ist für die von Eratosthenes in Anwendung gebrachte Methode und die Zahl 250000 giebt, alle anderen griechischen und lateinischen Autoren, welche die Gradmessung des Eratosthenes erwähnen, 252000 Stadien als das Resultat dieser Gradmessung geben. Cleomedes selbst soll nach Letronne an einer andern Stelle (lib. II, cap. 1, § 80) dem Eratosthenes 252000 Stadien zuschreiben. Diese Stelle ist folgende: *Ἐπεὶ οὖν ἡ γῆ πέντε καὶ εἴκοσι μυριάδων σταδίων, κατὰ τὴν Ἐρατοσθένους ἔφοδον, τὸν μέγιστον ἔχει κύκλον κτέ.* Nach

andrer Lesart jedoch lautet die Zahlenangabe: πέντε καὶ εἴκοσι μυ. ιάδων καὶ σταδίων τεσσαράκοντα. Letronne bemerkt hierzu, wie mir scheint mit vollem Rechte, dass statt μ' (τεσσαράκοντα) das in den ältern Handschriften sehr ähnliche ,β (2000) zu setzen sei; denn es ist nicht anzunehmen, dass 25040 Stadien dagestanden haben. Jedenfalls hat Eratosthenes die Zahl 250000 selbst auf 252000 erhöht, um für einen Grad in runder Zahl 700 Stad. zu erhalten.

Wie Eratosthenes die Zahl 5000 für die Entfernung Syene's von Alexandrien gefunden hat, wissen wir nicht. Nach Strabo rechnet er für den Lauf des Nil von Syene bis zum Meere 5300 Stadien, von welcher Zahl er 300 Stadien wegen der Krümmungen des Nil abzieht.

Zur Nachrechnung und Beurtheilung jenes Werths von 250000 (resp. 252000) Stadien, welchen Eratosthenes für den Erdumfang giebt, ist es zunächst nöthig, zu untersuchen, welches Masses sich Eratosthenes bedient hat.

Die alten Aegypter hatten eine mit der persischen übereinstimmende Elle, von Alters her die königliche genannt, von 525 bis 527mm Länge, welche aus 28 Fingerbreiten (Daktylen) bestand. Als jedoch das Ptolemäische Reich in Aegypten gegründet wurde, ward von der neuen Dynastie, unter Beibehaltung der alten Masse ihrer Grösse nach, das griechische Masssystem eingeführt. Die Elle, noch immer die königliche genannt, hatte von nun an 24 statt wie bisher 28 Daktylen; zwei Drittheile derselben bildeten den philetärischen oder ptolemäischen Fuss. Hieraus entstand ganz nach griechischer Weise das übrige System und so finden wir auch ein philetärisches Stadium von 600 Fuss, das zu 211m bestimmt worden ist. $7^1/_2$ philetärische Stadien bildeten die philetärische Meile (cf. Hultsch, Metrologie, Anhang, § 11, 2).

Jedenfalls nun hat sich Eratosthenes bei seiner Gradmessung des philetärischen Stadiums bedient. — Wenn er die

Entfernung von Syene bis Alexandrien zu 5000 Stadien, also, da 7407m eine geogr. Meile ausmachen, zu $\frac{211.5000}{7407} = 142$ geogr. Meilen angiebt, so hat er dieselbe überschätzt, da sie in Wirklichkeit nur ungefähr 114 Ml. ist. Da er sie weiterhin für den 50. Theil des Erdumfangs hält, während die wirkliche schon der 47. Theil ist, so vergrössert sich dieser Fehler beträchtlich bei der Bestimmung des Erdumfangs; denn 250000 Stad. sind mit Anwendung des philetärischen Stadiums etwa 7100 geogr. Ml. (252000 St. etwa 7180 geogr. Ml). — Ist somit ersichtlich, dass die Bestimmungsweise des Erdumfangs durch Eratosthenes aus vielen Gründen fehlerhaft und mangelhaft ist, so genügte doch das Ergebniss dieser Gradmessung den Anforderungen der damaligen Zeit und es ist jenem Manne jedenfalls als grosses Verdienst anzurechnen, dass er überhaupt eine bestimmte Messung der Erde zuerst versucht hat.

Sehr passend ist daher auch in der Einleitung des Werkes „Base du système métrique décimal“ bemerkt: „C'étoit un service essentiel qui ne pouvoit être rendu à la géographie que par un homme qui à beaucoup d'esprit joignît toutes les connoissances qu'on avoit pu amasser de son temps.“

F. Posidonius.

Die Reihe der griechischen Gelehrten, welche den Erdumfang zu bestimmen versuchten und von deren Verfahren wir Kunde haben, beschliesst Posidonius (134 bis 60 v. Chr.). Derselbe unternahm eine Breitengradmessung, welcher nach Cleomedes (lib. I, c. 10) folgende Daten zu Grunde liegen. Er nahm die beiden Orte Alexandria und Rhodus als unter demselben Meridiane liegend an (*φησὶν ὑπὸ τῷ αὐτῷ μεσημβρινῷ κεῖσθαι Ῥόδον καὶ Ἀλεξάνδρειαν*) und beobachtete, dass das Gestirn

α Argus (Canopus) zu Rhodus nur wenig über dem Horizonte erschien und bald darauf wieder verschwand (*ἐξῆς φησὶν ὁ Ποσειδώνιος, ὅτι Κάνωβος καλούμενος ἀστὴρ λαμπρότατός ἐστι πρὸς μεσημβρίαν, ὡς ἐπὶ τῷ πηδαλίῳ τῆς Ἀργοῦς. Οὗτος ἐν Ἑλλάδι οὐδ' ὅλως ὁρᾶται . . . . . ἀπὸ δὲ τῶν ἀρκτικῶν ὡς πρὸς μεσημβρίαν ἰοῦσιν, ἀρχὴν τοῦ ὁρᾶσθαι ἐν Ῥόδῳ λαμβάνει, καὶ ὀφθεὶς ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος, εὐθέως κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ κόσμου καταδύεται*). Weiterhin theilte er den Zodiakus in 48 Theile, indem er jedes Zeichen in 4 Theile zerlegte und schloss nun, dass, wenn er den Meridian durch Rhodus und Alexandria ebenfalls in 48 Theile theilte, diese Abschnitte denen auf dem Zodiakus gleich sein müssten. Das Gestirn α Argus erhob sich in Alexandria bei seiner Culmination um $^1/_4$ Zeichen, d. i. um $^1/_{48}$ des Thierkreises über den Horizont. Somit fand also Posidonius, dass der zwischen Rhodus und Alexandria liegende Theil des Meridians der 48. Theil desselben sein müsste (*ἐξῆς ὁ Ποσειδώνιος ἴσον ὄντα τὸν ζῳδιακὸν τοῖς μεσημβρινοῖς, ἐπεὶ καὶ αὐτὸς εἰς δύο ἴσα τέμνει τὸν κόσμον, εἰς ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα μέρη διαιρεῖ, ἕκαστον τῶν δωδεκατημορίων αὐτοῦ εἰς τέσσαρα τέμνων. Ἂν τοίνυν καὶ ὁ διὰ Ῥόδου καὶ Ἀλεξανδραίας μεσημβρινὸς εἰς τὰ αὐτὰ τῷ ζῳδιακῷ τεσσαράκοντα καὶ ὀκτὼ μέρη διαιρεθῇ, ἴσα γίνεται αὐτοῦ τὰ τμήματα τοῖς προειρημένοις τοῦ ζῳδιακοῦ τμήμασιν . . . . . εὑρίσκεται ὁ ἀστὴρ οὗτος ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ὕψος ἀπέχων τοῦ ὁρίζοντος, ἐπειδὰν ἀκριβῶς μεσουρανήσῃ, τέταρτον ζῳδίου, ὅ ἐστι τεσσαρακοστὸν ὄγδοον τοῦ ζῳδιακοῦ. Ἀνάγκη τοίνυν καὶ τὸ ὑπερκείμενον τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ τμῆμα τοῦ διαστήματος τοῦ μεταξὺ Ῥόδου καὶ Ἀλεξανδρείας, τεσσαρακοστὸν ὄγδοον μέρος αὐτοῦ εἶναι*). Der 48. Theil des Himmelsumfangs sind $7^1/_2{}^0$ und da also Posidonius schloss, dass die Entfernung von Rhodus bis Alexandria ebenfalls der 48. Theil des Erdumfanges sei und er diese Entfernung zu 5000 Stadien

annahm (*καὶ τὸ διάστημα τὸ μεταξὺ τῶν πόλεων, πεντακισχιλίων σταδίων εἶναι δοκεῖ*), so resultirten für den ganzen Erdumfang 240000 St.

Was nun zunächst die Behauptung des Posidonius anlangt, Rhodus und Alexandria lägen unter demselben Meridiane (dies ist derselbe in der alten Geographie gebräuchliche Hauptmeridian, welcher schon bei Eratosthenes, seinem Urheber, erwähnt worden ist), so beträgt der Längenunterschied der beiden Städte (denn von der „Stadt" Rhodus, nicht von einem unbestimmten Punkte der Insel ist die Rede) in Wirklichkeit $1^1/_2{}^0$; denn nach Nouet und Daussy (Conn. d. Temps, 1856) hat Alexandria die Länge von 47° 32′ 35″, nach Gauttier und Daussy Rhodus eine Länge von 45° 53′ 50″ (Ferro), und somit wäre die wirkliche Differenz 1° 38′ 45″.

Fernerhin scheint Posidonius die Behauptung, das Gestirn α Argus (Canopus) werde in Rhodus nur einen Augenblick gesehen, nicht in aller Strenge gemeint zu haben; denn wie Strabo bezeugt, wusste er, dass Eudoxus in dem etwa 15′ nördlich von Rhodus gelegenen Cnidus diesen Stern von seiner wenig erhöhten Sternwarte ebenfalls gesehen habe (Strabo, lib. II, cap. V, editio Tauchnit. p. 190 „*τὴν γὰρ Εὐδόξου σκοπὴν, οὐ πολὺ τῶν οἰκήσεων ὑψηλοτέραν εἶναι, λέγεσθαι δ'ὅτι ἐκεῖνος ἐντεῦθεν ἀφεώρα τὸν Κάνωβον ἀστέρα*").

Martin berechnet die (südliche) Declination des Canopus für 92 v. Chr. auf etwas weniger als 52° 28′, seine Poldistanz also auf etwas mehr als 37° 32′. Da nun nach Gauttier und Daussy (Conn. des Temps, 1856) die Breite von Rhodus 36° 26′ 53″ ist, so war die Höhe des Sterns über dem Horizonte 1° 5′ und wenn man hierzu die am Horizonte etwa $^1/_2{}^0$ betragende Refraction addirt, so war also die scheinbare Höhe mehr als $1^1/_2{}^0$, woraus sich ergiebt, dass Canopus etwa 2 Stunden lang über dem Horizonte sichtbar sein musste. Durch Berechnung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, welches

vom Aequator, vom Horizonte und vom Declinationskreise des Canopus gebildet wird, so dass die Morgenweite des Sterns die Hypotenuse, seine Declination die eine Kathete und das Complement der geogr. Breite von Rhodus den gegenüberliegenden Winkel bildet, findet man die andre Kathete = 74°. Das Doppelte derselben von 180° subtrahirt und den Rest in Zeit verwandelt giebt ungefähr 2h 8m für die Dauer seiner Sichtbarkeit.

Weiterhin ist aus dem Berichte des Cleomedes über die Gradmessung des Posidonius nicht zu ersehen, auf welchem Wege Posidonius die Höhe des Canopus über dem Horizonte von Alexandria erhielt. Es lässt sich nur vermuthen, dass er sich dabei eines mit Dioptern versehenen Instruments bediente, und zwar entweder des von Ptolemaeus beschriebenen Triquetrums (eines aus 3 Linealen zusammengesetzten Instruments oder des wahrscheinlich von Hipparch erfundnen Astrolabiums in seiner einfachsten Gestalt (ursprünglich nur ein mit einem Diopterlineal versehener Ring).

Die Poldistanz des Canopus nun war zur Zeit des Posidonius ungefähr 37° 32′ 25″, die Breite von Alexandria 31° 12′ 5″. Demnach war die Höhe des Canopus im Meridiane 6° 20′ 20″, ein Bogen, der durch die Refraction (8′ 27″) 6° 28′ 47″ gross wird. Da nun $^1/_{48}$ des Meridians 7° 30′ sind, so würde sich hiernach der Fehler des Posidonius zu ungefähr 1° ergeben. Da Posidonius aber diesen Winkel als den Erdbogen zwischen Rhodus und Alexandrien betrachtet, so wird sein Fehler bedeutend grösser; denn dieser Winkel ist noch nicht 5° 26′, so dass also Posidonius jene 5000 Stadien, welche er für die Entfernung von Rhodus bis Alexandrien annimmt, mit einer viel zu kleinen Zahl multiplicirt. Trotzdem erhält er ein richtigeres Resultat als man erwarten sollte; denn jene Entfernung war von ihm viel zu gross angenommen worden. Es liegt auf der Hand, dass diese Entfernungsangabe nur un-

gefähr sein konnte, da sich hierbei nur eine Schätzung nach Tag- und Nachtfahrten eines Schiffes machen liess. Die Worte des Posidonius selbst deuten darauf hin, dass er hier eine Hypothese macht (*καὶ ὑποκείσθω οὕτως ἔχειν*). Bei Strabo finden wir eine Menge verschiedner Angaben für diese Entfernung, unter denen die Zahl 5000 allerdings als die grösste erscheint. So finden wir im ersten Buche 4000, im zweiten bis zur Mitte von Rhodia 3640, sodann für die directe Ueberfahrt von Rhodus nach Alexandria mit Nordwind 4000 Stadien etc.

Um nun jene 5000 Stadien in unsere Masse zu übertragen, so sind wir genöthigt, uns hierbei jenes schon bei der Aristotelischen Angabe benutzten Stadiums von ungefähr 500′ preuss. zu bedienen, welches sich als der wahrscheinlichste Mittelwerth der bei solchen Schätzungen zu Grunde liegenden Längeneinheit ergab. Da nun 23600′ pr. eine geogr. Meile ausmachen, so sind 5000 Stadien $= \frac{5000.\ 500}{23600} = 106$ geogr. Ml. Aus der Berechnung des sphärischen Dreiecks Pol-Rhodus-Alexandria (wenn Rhodus 45° 53′ 50″ L. (F) und 36° 26′ 53″ Br., Alexandria 47° 32′ 35″ L und (der Hafen) 31° 12′ 5″ Br. hat) ergiebt sich jedoch diese Entfernung zu nur 81½ Ml. — Posidonius hatte sie somit um fast ⅓ ihres Werthes überschätzt.

Aus dem ganzen Berichte des Cleomedes scheint hervorzugehen, dass Posidonius sicher nur eine Methode angeben wollte, nach welcher sich die Grösse der Erde bestimmen liesse, dass er selbst jedoch keine wirkliche Gradmessung ausgeführt hat.

Hervorzuheben ist, dass Posidonius später eine andere Zahl, nämlich 180000 Stadien, als die richtige für den Erdumfang annahm, und zwar ist diese Zahl späterhin allein zur Geltung gekommen. Wie Posidonius diese Zahl erhalten hat, berichtet uns kein Autor, allein schon Riccioli (Geogr. re-

form. V, cap. 8) hat eine ziemlich richtige hierauf bezügliche Ansicht ausgesprochen indem er sagt: „Verum ubi Posidonius legit Eratosthenem damnasse vulgarem illam nautarum opinionem de stadiis 5000 inter Alexandriam et Rhodum et ex Sciathericis asseruisse, cum tantummodo 3750 ut narrat Strabo ib. II vel 3752 ut ex Plinio habetur lib. V. c. 31, statim haec stadia 3750 multiplicavit per 48 partem circuli quantam firmiter putabat esse inter Alexandriam et Rhodum, reperitque in ambitu terrae rotunde stadia 180000.“ Diese Behauptung unterstützt Riccioli sehr richtig dadurch, dass Posidonius nach dem Berichte des Cleomedes über die Entfernung von Rhodus bis Alexandria sehr in Zweifel war, und sie befremdet uns wohl kaum, wenn wir annehmen, dass Posidonius nur eine Methode einer Gradmessung habe geben wollen (Mannert, Geogr. der Griech. u. Römer, p. 106 lässt die Schüler des Posidonius diese Eratosthenische Zahl einer neuen Angabe zu Grunde legen, während Martin meint, Posidonius habe 240000 als Maximum, 180000 als Minimum geben wollen).

Wenn nun mit ziemlicher Sicherheit angenommen werden kann, dass Posidonius die Angabe des Eratosthenes benutzte, so folgt hieraus sofort, dass Posidonius zugleich auch die Längeneinheit des Eratosthenes — das philetärische Stadium — adoptirte. Dieses philetärische Stadium zu 211^{m} gerechnet giebt für 180000 Stadien $\frac{180000.\,211}{7407}$ also ungefähr 5130 geogr. Ml., eine Angabe, welche noch richtiger ausfällt als die oben berechnete erste Zahl des Posidonius.

Wenn wir somit gesehen haben, dass das Resultat der Schlüsse des Posidonius richtiger ist als dasjenige, welches sich aus der Messung des Eratosthenes ergeben hat, so hat doch Eratosthenes das grössere Verdienst, einestheils dadurch, dass die genauere Angabe des Posidonius jedenfalls aus seinen Betrachtungen und Beobachtungen hervorgegangen war und an-

derntheils auch deshalb, weil die bei seiner Messung in Betracht kommenden Fehler überhaupt geringer sind; denn dass das Resultat des Posidonius der Wahrheit schon beträchtlich nahe kommt, liegt darin begründet, dass sich die Fehler seiner Schlussfolgerungen schliesslich compensiren.

Mit Posidonius schliesst die Reihe der griechischen Gelehrten, die die Grösse der Erde festzustellen suchten und von deren Verfahren wir genaue Kunde haben. Späterhin scheint sich nur noch Ptolemaeus mit dem theoretischen Theile der Frage nach der Grösse der Erde befasst zu haben. Derselbe wusste bereits, dass man nicht genau in der Richtung des Meridians zu messen braucht, sondern dass die gemessne Strecke einen Winkel mit dieser Richtung bilden darf und dass man jene auf diese reduciren kann.

II.

Die aus dem Mittelalter herrührenden Angaben über die Grösse der Erde.

G. Die Araber.

Im Fortschreiten der Wissenschaft tritt eine lange Zeit der Lähmung ein, das wahre Interesse für sie ist fast gänzlich erloschen. Das Mittelalter findet keinen Gefallen am Aufblühen der Wissenschaft, es opfert seine Kräfte dem Kriege. Die Interessen der Kirche für die höchsten haltend unternehmen die Culturvölker in frommer Schwärmerei die Kreuzzüge und so ist es denn leicht erklärlich, dass überhaupt nur wenig Fragen der Wissenschaft und besonders der Naturwissenschaft discutirt werden.

Nur einen einzigen Versuch hat die Geschichte aus jener Zeit zu berichten, welchen die Araber machten, um die Grösse unsers Planeten zu bestimmen. — Die Kalifen von Bagdad, die Abbassiden besonders, suchten die Astronomie zu fördern und Almamun (814—833), der „grosse Kalif von Bagdad", nimmt selbst eine hervorragende Stellung unter den Förderern

und Trägern dieser Wissenschaft ein. (Almamun blühte ungefähr um's Jahr 827; denn in diesem Jahre liess er die *μεγάλη σύνταξις*, das astronomische Werk des Claudius Ptolemaeus, in's Arabische übersetzen und daher ist dieses Werk besonders unter dem arabischen Namen „Almagest" bekannt). Almamun veranlasste denn auch die Erforschung der Grösse eines Grades eines grössten Kreises der Erde. Als passendes Territorium, auf welches sich die Messung erstrecken sollte, wurde die Wüste Fingar am arabischen Meerbusen erkannt und zur Ausführung jener Messung selbst beobachtete man zunächst die Höhe des Polarsterns und ging sowohl nach Süd als auch nach Nord in der Richtung des Meridians so weit, bis sich die Höhe des Polarsterns um einen Grad verändert hatte. Dabei mass man gleichzeitig, so gut es möglich war, den zurückgelegten Weg. Hierzu bemerkt Riccioli in seinem bereits genannten Werke (Geogr. reform. lib. V, c. 9) „quomodo autem arcum coelestem uni gradui respondentem cum terrestri intervallo nacti sint observando, non est memoriae traditum, sed solum ex praedictis Auctoribus (Abilfedea und Alfraganus) constat eos in uno Gradu circuli Terrae Meridiani deprehendisse milliaria Arabica $56^2/_3$, ut inter plerosque convenit, quanquam aliqui suputassent 56 vel $56^1/_3$." Die Araber fanden also durch ihre Messung einen Grad zu $56^2/_3$ Meil. Wie Riccioli hierzu bemerkt, hat die arabische Meile 3000 alte Cubitus und 4000 neuere Cubitus, der alte arabische Cubitus 32 Zoll, der neuere 24 Zoll und der Zoll ist die Länge, welche resultirt, wenn man 6 Gerstenkörner mit ihren Bäuchen (in latum) zusammenlegt. —

III.

Die Breitengradmessungen der neueren Zeit.

H. Fernel.

Erst im Jahre 1525 machte der französische Arzt Fernel den erneuten Versuch, die Dimensionen der Erde zu bestimmen. Auch er ermittelte wie die Alten den Breitenunterschied auf astronomischem Wege in einer richtigen der Kugelgestalt der Erde entsprechenden Weise, wenn auch natürlicherweise mit mangelhaften Hülfsmitteln, aber auch er und ebenso später der Engländer Norwood (1635), dessen Gradmessung weiter unten besprochen werden soll, fehlten wie die Alten darin, dass sie die Entfernung zweier unter demselben Meridiane liegenden Orte auf der Erdoberfläche durch unmittelbares Messen genau bestimmen zu können glaubten.

Wie Riccioli in seinem bereits mehrfach citirten Werke mittheilt, beobachtete Fernel am 25. Aug. d. J. 1525 zu Paris die Höhe der Sonne bei ihrer Culmination zu 49° 13′ und indem er der Sonne eine nördliche Declination von 7° 51′ gab, leitete er hieraus die Aequatorhöhe zu 41° 22′ und demzufolge

die Polhöhe von Paris (beim Collegium S. Barbara) zu 48° 38′ ab. Fernerhin bestimmte er, wie gross an den folgenden Tagen die Sonnenhöhe bei der Culmination an einem Orte sein müsste, welcher um einen Grad nördlicher liegt als Paris. Endlich notirte er sich folgende Sonnenhöhen:

Altitudines ☉ in loco cujus Altitudo Poli gr. 48. 38′		
Augusti	Altit. Gr.	Solis ′
Die 26	47	51
Die 27	47	26
Die 28	47	5
Die 29	46	41

Nun reiste Fernel von Paris ab und wandte sich gegen Nord, indem er dabei so viel wie möglich die Richtung des Meridians inne hielt und bestimmte nach dem Verlaufe von anderthalb Tagen die Sonnenhöhe zu 48° 6′. Er fand sie also noch grösser als er sie für den 27. August berechnet hatte und daraus schloss er, dass er sich noch keinen vollen Grad von Paris entfernt befände. Endlich beobachtete er am 29. August die Sonnenhöhe zu 46° 41′, wie er sie für diesen Tag bestimmt hatte und er vermuthete also nun, dass der Ort, an welchem er sich befand, um einen Grad von Paris abstände.

Obgleich nun Fernel gehört hatte, dass die Entfernung dieses Orts (Amiens) von Paris 25 franz. Meilen sei, so suchte er doch die Grösse der Strecke selbst genau zu bestimmen, indem er ein zwar rohes aber doch auf seine Intelligenz ein ziemlich gutes Licht werfendes Mittel ergriff. Er zählte nämlich vermöge einer mechanischen Vorrichtung die Umdrehungen eines Rades seines Wagens, auf welchem er fuhr, dessen Umfang er zu 20 Fuss bestimmt hatte. 17024 solcher Rotationen

erhielt er und da er eine bestimmte Anzahl von Procenten für die Krümmungen des Wegs, welchen er zurückgelegt hatte, abzog, so lassen sich aus seinen Angaben für die Grösse eines Grades 56747 Toisen ableiten. Dieses Resultat nähert sich also bereits sehr der Wahrheit und dasselbe legt jedenfalls ein sehr gutes Zeugniss für den wissenschaftlichen Eifer und für die Gewissenhaftigkeit Fernel's ab.

J. Riccioli und Grimaldi.

Unter denen, welche sich bemühten über die Ausdehnungen unsers Planeten Aufschluss zu geben, verdienen jedenfalls auch Riccioli und Grimaldi genannt zu werden. Riccioli legt in seiner Geographia reformata verschiedne Methoden ziemlich sorgfältig dar, welche er theils selbst erfunden, theils auch andern Autoren entlehnt hat. Diese Methoden können jedoch meistentheils nur auf sehr kleine Bögen angewandt werden und werden auch ausserdem noch bei ihrer praktischen Verwerthung mehr oder weniger durch die astronomische und terrestrische Refraction modificirt. So giebt er z. B. die Kepler'sche Methode den Halbmesser der Erde zu bestimmen, welche in der Lösung der Aufgabe besteht, die Entfernung zweier Orte vom Mittelpunkte der Erde zu finden, wenn man ihre geradlinige Entfernung und ihre Zenithdistanzen kennt.

Ueber seine und Grimaldi's Bemühungen den Umfang der Erde zu finden, spricht er lib. V, sectio III („de nostra praxi et experimentis factis pro inquisitione magnitudinis globi terraquei") und führt unter Anderm an

„investigatio ambitus terrae per stellas fixas in communi Bononiensis ac Mutinensis loci verticali observatas" und giebt die Resultate:

In Gradu I. Terrestri	Passus Bononienses
Ex observatione lucidae Lyrae	63159
Ex observatione lucidae caudae Cygni .	$63486^{13}/_{116}$

Ferner: ;,investigatio ambitus terrae per stellas fixas observatas in communi verticali Serrae paterni montis et turris basilicae Ferrariensis", wozu er giebt

Ex observatione humeri lucidi ursae majoris etc.	In I. Gradu terrestri sunt passus Bononienses.
	63696

Es ist aus diesen Resultaten, welche doch nur roh übereinstimmen, ersichtlich, dass die Methoden, durch welche Riccioli zu jenen gelangt ist, wenig Vertrauen verdienen und daher ist es erklärlich, dass diese Resultate heutigen Tages fast ganz vergessen sind und nur noch als historische Daten aufbewahrt werden.

K. Snellius.

Wir gelangen jetzt zu einer neuen Epoche in der Geschichte der Gradmessung. Die alte Methode der directen Messung eines Bogenstücks verlassend brachte der Holländer Snellius zuerst (1615) eine bessere Methode in Anwendung — die Triangulationsmethode. Das hierbei noch heute beobachtete Verfahren besteht darin, dass man (wie bereits in der Einleitung erwähnt) das seiner Grösse nach zu ermittelnde

Bogenstück durch ein Netz von Dreiecken mit einer kürzern, in Bezug auf das Terrain zu derartigen Zwecken günstig gelegenen Linie, der sogenannten Basis, in Verbindung bringt, nur die Grösse dieser Basis durch directes Messen ermittelt und in den Dreiecken dann nur die Winkel beobachtet, was ja bekanntlich mit ausserordentlicher Schärfe geschehen kann.

Die Breitengradmessung, welche Snellius unternahm, um den Umfang der Erde zu ermitteln, erstreckte sich auf das Meridianstück zwischen Alkmaar und Bergenopzoom in Holland und er fand vermittelst einer gemessenen Standlinie von 2111 Tois. 5 Fuss und der darauf basirten Triangulation den Grad zu 55100 Tois. Snellius selbst entdeckte mehre Fehler in seinen Bestimmungen, er starb jedoch, bevor er seine Arbeit hätte völlig rectificiren können und erst 100 Jahre später that dies Muschenbroek, welcher den Meridiangrad zu 57033 Toisen bestimmte, ein Resultat, welches sich in der That der Wahrheit schon beträchtlich nähert.

L. Norwood.

Unter denjenigen Nationen, welche nach dem Holländer Snellius sich bemüht haben, das Problem der Gradmessung möglichst vollkommen und vollständig zu lösen, ist hauptsächlich und besonders die französische Nation anzuführen. Unter den Engländern war es nur Norwood, der im Jahre 1635 einen Versuch machte, die Grösse eines Meridiangrads zu ermitteln. Er bestimmte dieselbe zu 57300 Tois., indem er den Bogen zwischen London und York mit der Kette mass und die abweichenden Richtungen von der geraden Linie mit einem Graphometer ermittelte und sie darnach auf die Richtung des Meridians reducirte.

M. Picard.

Die Pariser Academie der Wissenschaften (1666 gegründet), in welcher sich während der damaligen Zeit die wissenschaftlichen Kräfte Frankreichs concentrirten und welche als Förderin der Wissenschaft wohl einzig dastehend Anlass gab zur Untersuchung einer Menge von Fragen und zur Ausführung von Arbeiten der verschiedensten Art, nahm sich denn auch der Frage nach der Grösse der Erde an. Indem sie die Regierung in das Interesse zog konnte sie über die nöthigen Mittel verfügen und daher eine grössere derartige Unternehmung ermöglichen.

Hierbei suchte man mit aller nur möglichen Genauigkeit zu verfahren, und wir sehen die Methode, welche man anwandte, bei jeder folgenden Gradmessung wesentlich vervollkommnet. Die von Snellius bereits eingeführte Triangulationsmethode beibehaltend schob man die Dreiecke nicht wie dieser in einander, sondern legte sie möglichst neben einander. Man berücksichtigte fernerhin auch die verschiednen Dreieckspunkte in Bezug auf ihre einzelnen Erhebungen und reducirte die Resultate der Messung auf den Horizont und betrachtete die grösseren Dreiecke des in Frage kommenden Dreiecksnetzes nicht als eben, sondern als sphärisch.

Picard, welcher im Vereine mit Auzout zuerst (1667) das Fernrohr an den astronomischen Messinstrumenten anbrachte, führte eine ziemlich genaue Gradmessung aus, bei welcher er, wie bereits angedeutet, Snellius' Methode anwendend eine bis dahin nicht gekannte Sorgfalt entwickelte. Das Meridianstück, welches er mass, war das zwischen den Parallelkreisen von Malvoisine und Sourdon sich befindende. Er wählte 13 Hauptstationen und bildete mit denselben 13 Dreiecke. Seine Basis war die Strecke zwischen Ville-Juive und Juvisy. Diese Basis wurde auf zwei verschiedne Weisen ge-

messen und es ergab sich das eine Mal für sie eine Grösse von 5662 Tois. 5 Fuss, das andere Mal von 5663 Tois. 1 Fuss, und daher wurde sie in runder Zahl zu 5663 Tois. angenommen. Die drei Hauptstrecken zwischen den 4 folgenden sehr nahe unter demselben Meridiane liegenden Orten, welche aus der Triangulation resultirten, waren

Malvoisine	
Tertre de Mareil	31897 Tois.
St. Samson de Clermont	17557 Tois.
Sourdon	18905 Tois.

Die Breitendifferenz der beiden Orte Malvoisine und Sourdon ergab sich zu 1° 11′ 57″ und da ihre Entfernung auf 68430 Tois. 3 Fuss erhöht wurde, so erhielt Picard für die Länge eines Grades 57064 Tois. 3 Fuss, jedoch sah er sich veranlasst, diese Zahl auf 57060 Tois. zu erniedrigen.

Hiermit war nun

der Durchmesser der Erde	6538594 Tois.,
der Halbmesser der Erde	3269297 Tois.,
der Umfang der Erde	20541600 Tois.

Nun folgt im „Abbregé de la Mesure de la Terre“, in welchem Picard's Gradmessung besprochen wird, folgender „Rapport des Mesures Etrangères à celle de Paris“ La toise du Châtelet de Paris est divisée en 6 pieds, et si l'on suppose que ce pied soit divisé en 1440 part.

Le pied de Rhin ou de Leyde est de	1390 part.
Le pied de Londres	1350
Le pied de Boulogne	1686
La brasse de Florence	2580

Hieran schliesst sich folgende Uebersicht:

„La grandeur du Degré d'un grand Cercle de la Terre, suivant les Mesures de divers Pais.“

Toises du Châtelet de Paris	57060
Pas de Boulogne	58481

Verges de Rhin de 12 pieds chacune 29556
Lieuës Parisiennes de 2000 toises . . . . . $28^{1}/_{4}$ (?)
Lieuës moïennes de France d'environ 2282 toises chacune 25
Lieuës de Marine de 2853 toises 20
Milles d'Angleterre de 5000 pieds chacune . . $73^{7}/_{20}$
Milles de Florence de 3000 Brasses . . . . $63^{7}/_{20}$

Endlich folgt noch eine „Table pour la valeur d'un Degré d'un grand Cercle de la Terre distribué en Min. et Sec.“:

Min.	Toises	Sec.	Toises
1	951	1	16
2	1902	2	32
3	2853	3	48
4	3804	4	63
5	4755	5	79
6	5706	6	95
7	6657	7	111
8	7608	8	127
9	8559	9	143
10	9510	10	$158^{1}/_{2}$

etc. etc.

Dem sind nun einige Schlussbemerkungen hinzugefügt:

„On a pû remarquer dans le détail des opérations qui ont été faites pour la mesure d'un Degré du Méridien, qu'il n'étoit pas possible d'y apporter plus de précautions ni une plus grande exactitude que l'on a fait: mais quoique les Instrumens dont on s'est servi pour prendre les hauteurs des Etoiles fixes, soient très-grands et très bien divisez; on ne peut pas pourtant y être assuré de 4 secondes de Degré tout au plus; ce qui peut venir tant de la part de la division de l'Instrument, que de celle des observations pour la verification, et pour les hauteurs des Etoiles; c'est pourquoi on demeure toûjours dans l'incertitude de plus de 60 toises sur un Degré, qui a été déterminé de 57060 toises, quand même on seroit d'ailleurs

parfaitement assûré de la mesure des triangles qui ont donné la distance des lieux: c'est une erreur qui n'est pas considerable pour un Degré, mais elle le devient dans la mesure du Cercle entier, étant multipliée 360 fois, et il n' y a pas moïen de l'éviter qu'en mesurant une plus grande portion de la Méridienne."

N.

Fortsetzung der Picard'schen Gradmessung durch Cassini und Lahire.

In diesem Sinne beurtheilte denn auch die Pariser Academie die Frage nach der Grösse eines Breitengrads. Sie beauftragte Maraldi, Cassini und Lahire die Messung des Picard fortzusetzen und dies geschah im Norden bis Dünkirchen, im Süden bis Collioure. 1718 theilte Cassini die Resultate und die Einzelheiten dieses Unternehmens in einem Anhange zu den Memoiren der Academie mit.

Man bestimmte zunächst so genau wie nur möglich die Richtung der Meridianlinie, welche durch die Mitte der Pariser Sternwarte geht und bildete eine Dreieckskette mit Zugrundelegung der von Picard zu 5663 Tois. bestimmten Basis. — Wie bereits erwähnt, erstreckten sich die Messungen im Süden von Paris bis Collioure, und zwar über eine Strecke von $6^0\ 18'\ 56''^1/_3$, im Norden von Paris bis Dünkirchen über eine Strecke von $2^0\ 12'\ 15''^1/_2$. Im Süden bestimmte man die Grösse eines Grads zu 57097 Tois., im Norden zu 56960 Tois.

Daraus, dass im Süden der Grad grösser gefunden wurde als im Norden, zieht Cassini folgenden Schluss: „Ainsi il paroît avec assez d'évidence, que les degrés d'un Méridien sont plus grands, plus ils sont près de l'Equateur et diminuent

au contraire, à mesure qu'ils s'approchent du Pôle; d'où l'on peut conclure que la circonférence de la Terre n'est pas de figure Sphérique."

Hieran knüpft Cassini weiterhin theoretische Betrachtungen, welche hier folgen mögen, da sie dienen sollten, eine so eigenthümliche Ansicht von der Gestalt der Erde zu begründen und zu stützen.

Cassini nimmt also an, dass die Erde an den Polen zugespitzt sei und beweist zunächst, dass sich die Grade, wenn sie sich dem Pole nähern, verkleinern und dass sie sich vergrössern, wenn sie sich vom Pole entfernen. Diese Betrachtung ist folgende: Es sei BCK eine Ellipse (Fig. 1), welche den Umfang der Erde darstellt. Die Pole seien die Endpunkte der grossen Axe B und C. G, H, I und K seien Punkte auf der Ellipse, und in diesen Punkten seien die Normalen GZ, HL, IM und KN errichtet, welche sich nach gehöriger Verlängerung in den Krümmungsmittelpunkten O, R und S schneiden. Dann kann man die Ellipse betrachten als zusammengesetzt aus einer Menge kleiner Kreisbögen GH, HI und IK. Wenn man nun die Punkte G, H, I, K so wählt, dass der Winkel PGZ oder BQZ, welcher die Entfernung des Pols vom Zenithe des Punktes G misst, sich um dieselbe Grösse vom Winkel THL, der die Entfernung des Pols vom Zenithe des Punkts H darstellt, unterscheidet, wie Winkel THL vom Winkel VIM und Winkel VIM vom Winkel XKN, so ergiebt sich, dass die Winkel GOH, HRI, ISK einander gleich sind; denn

$$\angle \text{PGZ oder } \angle \text{TYZ} = \angle \text{THL} - \angle \text{GOH},$$
$$\angle \text{THL oder } \angle \text{VωL} = \angle \text{VIM} - \angle \text{HRI},$$
$$\angle \text{VIM oder } \angle \text{XxM} = \angle \text{XKN} - \angle \text{ISK}.$$

Da nun ∠ PGZ, ∠ THL, ∠ VIM, ∠ XKN um gleichviel sich von einander unterscheiden sollten, ∠ GOH, ∠ HRI, ∠ ISK diese Grössen sind, um welche sich jene Winkel von einander unterscheiden, so müssen dieselben gleich sein. Diese

gleichen Winkel GOH, HRI und ISK werden durch die Seiten GO, OH, HR, RI, IS, SK gebildet, und zwar sind die Seiten GO und OH um ebensoviel kleiner wie HR und RI als HR und RI kleiner sind wie IS und SK. Demzufolge wird der zwischen den kleineren Seiten GO und OH enthaltene Bogen GH kleiner sein als der Bogen IK, der zu den grösseren Seiten HR und RI gehört und ebenso ist der Bogen HI kleiner als IK. Wenn man also annimmt, dass die Erde die Gestalt eines gegen die Pole hin verlängerten Ellipsoids besitze, so werden zu gleichen Theilen eines Meridians auf der Oberfläche der Erde ungleiche Strecken gehören, welche sich verkleinern, je mehr sie sich den Polen nähern und welche grösser werden, je mehr sie sich von denselben entfernen.

Wenn in dieser Weise die Gestalt der Erde festgesetzt worden ist, so ist es, um ihre Ausdehnungen kennen zu lernen, nöthig, sie in Grade einzutheilen und die Grösse eines jeden dieser Grade zu bestimmen. Dies führt Cassini in folgender Weise aus: Es sei von einem der Brennpunkte E (Fig. 2) die Linie ED gezogen, welche mit der Axe BC einen Winkel BED bildet, der gleich der gegebenen Entfernung des Pols vom Zenithe ist. Vom andern Brennpunkte F aus sei ein Kreisbogen mit der grossen Axe BC beschrieben, welcher ED in D schneidet. D verbinde man mit F durch eine gerade Linie, welche die Ellipse in G trifft. Dann liegt der Punkt G auf dem Umfange der Ellipse in der gegebenen Poldistanz, so dass, wenn man in G die Normale GZ errichtet, dieselbe in Q die Axe schneidet und wenn man GP parallel zur nach dem unendlich weit entfernten Pole gerichteten Axe BC zieht, der Winkel BQZ oder PGZ gleich ist der gegebenen Anzahl von Graden. Auf ganz gleiche Weise lassen sich die Punkte H, I, K in der gegebenen Poldistanz finden.

Zum Beweise für die jetzt ausgesprochenen Behauptungen dient folgende Betrachtung: Wie aus der Construction sofort

au contraire, à mesure qu'ils s'approchent du Pôle; d'où l'on peut conclure que la circonférence de la Terre n'est pas de figure Sphérique."

Hieran knüpft Cassini weiterhin theoretische Betrachtungen, welche hier folgen mögen, da sie dienen sollten, eine so eigenthümliche Ansicht von der Gestalt der Erde zu begründen und zu stützen.

Cassini nimmt also an, dass die Erde an den Polen zugespitzt sei und beweist zunächst, dass sich die Grade, wenn sie sich dem Pole nähern, verkleinern und dass sie sich vergrössern, wenn sie sich vom Pole entfernen. Diese Betrachtung ist folgende: Es sei BCK eine Ellipse (Fig. 1), welche den Umfang der Erde darstellt. Die Pole seien die Endpunkte der grossen Axe B und C. G, H, I und K seien Punkte auf der Ellipse, und in diesen Punkten seien die Normalen GZ, HL, IM und KN errichtet, welche sich nach gehöriger Verlängerung in den Krümmungsmittelpunkten O, R und S schneiden. Dann kann man die Ellipse betrachten als zusammengesetzt aus einer Menge kleiner Kreisbögen GH, HI und IK. Wenn man nun die Punkte G, H, I, K so wählt, dass der Winkel PGZ oder BQZ, welcher die Entfernung des Pols vom Zenithe des Punktes G misst, sich um dieselbe Grösse vom Winkel THL, der die Entfernung des Pols vom Zenithe des Punkts H darstellt, unterscheidet, wie Winkel THL vom Winkel VIM und Winkel VIM vom Winkel XKN, so ergiebt sich, dass die Winkel GOH, HRI, ISK einander gleich sind; denn

$$\angle \text{PGZ oder } \angle \text{TYZ} = \angle \text{THL} - \angle \text{GOH},$$
$$\angle \text{THL oder } \angle \text{VωL} = \angle \text{VIM} - \angle \text{HRI},$$
$$\angle \text{VIM oder } \angle \text{XxM} = \angle \text{XKN} - \angle \text{ISK}.$$

Da nun ∠ PGZ, ∠ THL, ∠ VIM, ∠ XKN um gleichviel sich von einander unterscheiden sollten, ∠ GOH, ∠ HRI, ∠ ISK diese Grössen sind, um welche sich jene Winkel von einander unterscheiden, so müssen dieselben gleich sein. Diese

gleichen Winkel GOH, HRI und ISK werden durch die Seiten GO, OH, HR, RI, IS, SK gebildet, und zwar sind die Seiten GO und OH um ebensoviel kleiner wie HR und RI als HR und RI kleiner sind wie IS und SK. Demzufolge wird der zwischen den kleineren Seiten GO und OH enthaltene Bogen GH kleiner sein als der Bogen IK, der zu den grösseren Seiten HR und RI gehört und ebenso ist der Bogen HI kleiner als IK. Wenn man also annimmt, dass die Erde die Gestalt eines gegen die Pole hin verlängerten Ellipsoids besitze, so werden zu gleichen Theilen eines Meridians auf der Oberfläche der Erde ungleiche Strecken gehören, welche sich verkleinern, je mehr sie sich den Polen nähern und welche grösser werden, je mehr sie sich von denselben entfernen.

Wenn in dieser Weise die Gestalt der Erde festgesetzt worden ist, so ist es, um ihre Ausdehnungen kennen zu lernen, nöthig, sie in Grade einzutheilen und die Grösse eines jeden dieser Grade zu bestimmen. Dies führt Cassini in folgender Weise aus: Es sei von einem der Brennpunkte E (Fig. 2) die Linie ED gezogen, welche mit der Axe BC einen Winkel BED bildet, der gleich der gegebenen Entfernung des Pols vom Zenithe ist. Vom andern Brennpunkte F aus sei ein Kreisbogen mit der grossen Axe BC beschrieben, welcher ED in D schneidet. D verbinde man mit F durch eine gerade Linie, welche die Ellipse in G trifft. Dann liegt der Punkt G auf dem Umfange der Ellipse in der gegebenen Poldistanz, so dass, wenn man in G die Normale GZ errichtet, dieselbe in Q die Axe schneidet und wenn man GP parallel zur nach dem unendlich weit entfernten Pole gerichteten Axe BC zieht, der Winkel BQZ oder PGZ gleich ist der gegebenen Anzahl von Graden. Auf ganz gleiche Weise lassen sich die Punkte H, I, K in der gegebenen Poldistanz finden.

Zum Beweise für die jetzt ausgesprochenen Behauptungen dient folgende Betrachtung: Wie aus der Construction sofort

hervorgeht, ist FD gleich der Axe BC. Der Eigenschaft der Ellipse zufolge ist BC = EG + GF = DG + GF, also folgt EG = GD. Die Winkel DEG und EDG sind mithin einander gleich und daher ist jeder die Hälfte des äusseren Winkels EGF. Durch die Normale GQ ist aber dieser Winkel in zwei gleiche Theile getheilt, demnach ist ∟ EGQ = ∟ DEG und deshalb laufen GQ und ED parallel und es ist ∟ BQZ = ∟ BED. ∟ BED ist aber nach der Construction gleich der gegebenen Entfernung des Pols vom Zenithe und daher misst also auch ∟ BQZ diese Entfernung.

Nachdem nun die Ellipse in dieser Weise in Grade eingetheilt worden ist, lässt sich durch Rechnung die Lage der Punkte H, I, K u. s. w. bestimmen; denn es verhält sich

FD od. BC: EF = sin BED: sin EDF od. sin DEG, woraus sin DEG, also Winkel DEG gefunden werden kann. Wenn man nun diesen Winkel DEG zum Winkel BED (zur gegebenen Entfernung des Pols vom Zenithe des Punkts G) hinzufügt, so erhält man den Winkel BEG. — Um die Entfernung des Punktes G vom Brennpunkte E zu bestimmen, braucht man nur in das Dreieck EGF zu gehen; denn in demselben kennt man die Seite EF, den Winkel EGF (das Doppelte vom Winkel DEG) und den Winkel FEG (Supplement von BEG).

Ganz auf dieselbe Weise lassen sich dann die Winkel BEH, BEI, BEK u. s. w. und die Linien EH, EI, EK u. s. w. bestimmen und damit können die Sehnen GH, HI, IK aus den Dreiecken GEH, HEI, IEK gefunden werden. — Hierdurch hat man also das genaue Verhältniss der Sehnen der einzelnen Grade und da das Verhältniss dieser Sehnen nicht merklich abweicht von dem Verhältnisse, in welchem die Bögen, zu denen sie gehören, unter einander stehen, so hat man demzufolge gleichzeitig auch das Verhältniss zwischen den Graden des elliptisch vorausgesetzten Erdumfangs. Behufs grösserer Genauigkeit könnte man das Verhältniss in Rechnung ziehen,

welches stattfindet zwischen den Sehnen der Hälften oder der Viertel, ja selbst der Minuten eines Grades, so dass alsdann der Unterschied zwischen den Bögen und den Sehnen ganz unmerklich wäre, aber es ist dabei in Betracht zu ziehen, dass der Unterschied zwischen dem Bogen eines Grads und seiner Sehne nur ungefähr 4 Fuss ist.

Indem Cassini diese eben dargelegte Methode, die Grösse eines Grads zu bestimmen, auf seine Gradmessung anwandte, fand er, dass der Erdmeridian ziemlich genau durch eine Ellipse mit der Excentricität von 14400 Theilen, wenn ihre halbe grosse Axe 100000 solcher Theile hat, dargestellt wird, so dass ein ungefähres Verhältniss von 1 : 7 resultirt. Fernerhin findet Cassini beispielsweise die Grösse eines Grades zwischen den Breiten 48° und 49° zu 57005 T., zwischen den Breiten 50° und 51° zu 56944 T. 2 Fuss und zwischen 42° und 43° zu 57192 T. 4 Fuss.

Wenn Cassini so die Grade ihrer gefundenen Grösse nach zusammenfügt, so findet er die Entfernung, welche 6° 18′ 56″ (dem Breitenunterschiede von Paris und Collioure) entspricht, zu 360602 Tois., während durch directe Messoperationen 360604 Tois. erhalten wurden, und ferner findet er die Entfernung, welche 8° 31′ 11″⁵/₆ (dem Breitenunterschiede von Collioure und Dünkirchen) entspricht, zu 486156½ Tois., ebensogross wie sie durch die Gradmessung gefunden worden war.

Die grosse Axe des Erdellipsoids wird von Cassini zu 6579368 Tois. und die Entfernung zwischen den beiden Brennpunkten zu 947434 Tois. bestimmt.

Zur Auffindung der kleinen Axe des Erdellipsoids, des Durchmessers des Aequators also, schlägt Cassini folgenden Weg ein. Er betrachtet die unbekannte Strecke AK (Fig. 3) als die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse EK als die Hälfte der grossen Axe und dessen andre Kathete AE als die Hälfte der Entfernung zwischen den beiden Brennpunk-

ten bekannt sind. Somit findet er den Durchmesser des Aequators zu 6510796 Tois., also um 68572 Tois. kleiner als die grosse Axe und er sagt: „La différence entre l'axe de la Terre et le diamètre de l'Equateur sera donc la quatre-vingt-quinzième partie de ce diamètre plus grande que celle qui a été déterminée par Mrs. Huygens et Newton, qui ont jugé la Terre applatie vers les Pôles. Le premier ayant trouvé la différence entre le diamètre de l'Equateur et l'Axe de la Terre de la 578me partie de ce diamètre et le second de la 230me partie."

Vermöge des bekannten Durchmessers des Aequators findet Cassini den Umfang des letzteren zu 20454274 Tois. und daher die Grösse jedes Aequatorgrads zu 56817 Tois. — Für den Umfang eines Meridians giebt Cassini 20563100 Tois., so dass der Unterschied zwischen diesem Umfange und dem des Aequators 108826 Tois. beträgt.

Um endlich den Durchmesser, den Umfang und die Grösse der Grade eines jeden Parallelkreises zu finden, braucht man nur in das rechtwinklige Dreieck ELH zu gehen, in welchem der Winkel LEH und die Hypotenuse EH bekannt sind.

Nun giebt Cassini noch eine

„Table des Degrés d'un Méridien de la Terre", welche hier im Auszuge folgen möge.

Hauteur du Pole	Distance du Pole au Zenith	Grandeur des Degrés d'un Mérid.		Hauteur du Pole	Distance du Pole au Zenith	Grandeur des Degrés d'un Mérid.	
Degrés	Degrés	Toises	Pieds.	Degrés	Degrés	Toises	Pieds.
90	0	56224	4	40	50	57285	2
80	10	56287	3	30	60	57580	3
70	20	56444	3	20	70	57819	3
60	30	56682	5	10	80	57969	0
50	40	56975	0	1	89	58019	4

6.

Die peruanische und die lappländische Gradmessung.

Die auf die soeben besprochne Gradmessung sich stützende Ansicht, die Erde besitze die Gestalt eines an den Polen zugespitzten Ellipsoids, wurde von der Pariser Academie festgehalten und gegen die Behauptung, die Erde sei an den Polen abgeplattet, möglichst vertheidigt. Bereits oben wurde eine Stelle aus einer Abhandlung in den Pariser Memoiren vom J. 1720 angeführt, aus welcher ersichtlich ist, wie man sich bemühte, dies Resultat jener Breitengradmessung mit dem entgegengesetzten Resultate, welches aus von Richer angestellten Pendelbeobachtungen entsprang, zu vereinigen. — Mehr oder minder sichere Mittel wurden in Vorschlag gebracht, welche zur Lösung der Streitfrage hätten führen können. Endlich ergriff man das sicherste Mittel, vermöge dessen allein die Frage auf empirischem Wege erledigt werden konnte: man unternahm Gradmessungen an zwei der Breite nach sehr verschiedenen Orten, um aus der Combination der Resultate dieser Messungen die wirkliche Gestalt der Erde zu erhalten. So wurden denn auf Veranlassung der Pariser Academie zwei Gradmessungen unternommen, und zwar die wegen der Genauigkeit ihrer Resultate berühmte sogenannte peruanische Gradmessung und die allerdings jetzt als incorrect erkannte und daher beseitigte lappländische Gradmessung. Die erstgenannte Messung führten Bouguer, Condamine und Godin vom J. 1735 an aus, die letztere wurde von Maupertuis, Clairaut und dem Schweden Celsius in's Werk gesetzt. — Die Genauigkeit, mit welcher man zu Werke zu gehen sich von vornherein vorgenommen hatte, machte zunächst die sichere Bestimmung der Einheit eines Längenmasses dringend nöthig.

Es wurden zu diesem Zwecke für jede der beiden Expeditionen zwei einander gleiche Exemplare der Toise angefertigt, und zwar in Gestalt zweier Eisenstäbe (Condamine „Mesure des trois premiers Degrés du Méridien dans l'hémisphère austral": „Nous avions emporté avec nous 1735 une règle de fer poli, de dix-sept lignes de largeur sur quatre lignes et demie d'épaisseur. M. Godin, aidé d'un artiste habile, avait mis toute son attention à ajuster la longueur de cette règle sur celle de la Toise étalon, qui a été fixé en 1668 au pied de l'esalier du grand Châtelet de Paris. Je prévis que cet ancien étalon, fait assez grossièrement, et d'ailleurs exposé aux chocs, aux injures de l'air, à la rouille, au contact de toutes les mesures qui y sont présentées, et à la malignité de tout mal-intentionné, ne serait guère propre à vérifier dans la suite la Toise qui allait servir à la mesure de la Terre"). Die eine dieser beiden Toisen, und zwar die, welche bei der lappländischen Gradmessung in Anwendung gebracht worden war, wurde durch Schiffbruch beschädigt, jedoch wurde die andere, die bei der Gradmessung in Peru angewandte, unversehrt zurückgebracht und bildete in der Folge unter der Benennung „Toise du Pérou" die Grundlage des französischen Massystems, und zwar war die Länge, die sie bei + 13° R besass, die Längeneinheit. Da die bei der peruanischen Gradmessung erzielten Resultate, wie bereits erwähnt, ziemlich sicher und genau sind und aus diesem Grunde für die Ermittlung der Dimensionen und der Gestalt der Erde ein sehr schätzenswerthes Material liefern, so ist Sorge dafür getragen worden, dass das Original der „Toise du Pérou" sicher aufbewahrt und vor allen Beschädigungen geschützt werde, da doch mit seinem Verluste der Werth jener Resultate nur illusorisch sein würde.

Um zunächst die peruanische Gradmessung zu besprechen, so kamen die zur Unternehmung derselben von der Pariser Academie Beauftragten nach einer fast einjährigen Reise

am 9. März 1736 an der Rhede von Manta an. Es ist im höchsten Grade anerkennenswerth, welche Ausdauer dieselben bei der Ausführung ihrer Aufgabe entwickelten; denn das Gebiet, auf welches sich die Gradmessung erstrecken sollte, war für derartige Operationen nicht gerade sehr geeignet. Hierüber ist in den Pariser Memoiren vom J. 1744 gesagt: „La fameuse chaîne de montagnes, connue sous le nom de Cordelière, est voisine de la côte occidentale de l'Amérique, il n'y a guère entr'elle et la mer que 40 à 45 lieues; ce terrain est rempli de forêts souvent inondées par les pluies et les torrens qui tombent des montagnes en certains temps . . . . . ils se mirent en route par des chemins que leur seule ardeur pouvoit leur rendre praticables; ces forêts n'étoient qu'un bourbier perpétuel, plus peuplé de tigres que d'hommes, quoique les premiers n'y soient pas encore en grand nombre, mais celui des serpens y est très-grand, et dans ce nombre il y a plusieurs espèces très-dangereuses.

Enfin après des fatigues presqu'incroyables ils arrivèrent à la montagne par laquelle il faut passer pour arriver à Quito“. . .

Die peruanische Gradmessung erstreckte sich zwischen Tarqui und Cotchesqui auf einen Meridianbogen von 3° 7′ Ausdehnung. Diese Grösse war hauptsächlich durch Beobachtungen des Gestirns ε Orionis ermittelt worden; denn die scheinbare Zenithdistanz dieses Gestirnes für Cotchesqui reducirt auf den 1. Jan. 1743 fand Bouguer zu 1° 25′ 48.″3 und für Tarqui bestimmte sie Condamine zu 1° 41′ 10.″7. Also ergab sich eine Amplitude von 3° 6′ 59″, die auf 3° 7′ erhöht wurde. Als Grundlage für die geodätischen Operationen waren zwei Basen gemessen worden, und zwar die eine bei Quito in der Ebene von Yarouqui, welche zu 6273 Tois. bestimmt wurde, die andere bei Tarqui, deren Grösse man zu 5259 Tois. fand. Die Entfernung der beiden Parallelkreise von Tarqui und Cotchesqui betrug 176950 Tois. und somit be-

stimmte man die Grösse eines Grades zu 56753 Tois., reducirt auf das Niveau des Meeres. — Verbesserte Zahlenangaben giebt Bessel in der 333. Nummer der astr. Nachrichten. Wie Bessel sagt, hat er das Mittel aus den Reductionen der Beobachtungen einestheils durch Delambre, anderntheils durch v. Zach genommen. Nach diesen Angaben liegt Tarqui unter der Polhöhe — 3° 4′ 32.″068 und Cotchesqui unter + 0° 2′ 31.″387. Die Amplitude des zu 176875.5 T. angegebenen Meridianbogens ist demnach 3° 7′ 3.″455.

Die gleichzeitig in Lappland unternommene und von Clairaut, Camus, le Monnier, Maupertuis und Celsius ausgeführte Breitengradmessung erstreckte sich auf das Meridianstück zwischen Torneâ und Kittis, deren Entfernung zu 55023½ Tois. gefunden wurde und da man die Amplitude dieses Meridianstücks zu 57′ 27″ bestimmte, so erhielt man für einen Grad 57437 Tois.

Es war also nunmehr constatirt, dass die Grösse der Grade mit zunehmender Breite wächst und somit feierte der auf theoretischem Wege von Newton gefundene Satz, dass die Erde an den Polen abgeplattet sei, einen grossen Triumph. — Mit dieser so gewonnenen Erkenntniss änderte sich jedoch auch der Gesichtspunkt, von welchem man beim Ausführen einer Gradmessung ausging: es kam zu der Frage nach der Grösse der Erde auch noch das Forschen nach der Gestalt der Erde hinzu und wir sehen, dass sich in der Folgezeit die Gradmessungen in einer Weise vervollkommnet haben, welche es ausser Zweifel setzt, dass es dem menschlichen Geiste doch noch gelingen wird, über die letzte Frage sich vollständigen Aufschluss zu verschaffen. —

Zum Schlusse möge noch die Entwickelung zweier Formeln gegeben werden, welche noch dazu benutzt werden können, den Abplattungsconficienten α der Erde aus zwei Gradmessungen zu finden.

a. Die Formel von Maupertuis.

Der Krümmungshalbmesser ρ für einen Ellipsenpunkt mit den Coordinaten x und y ist

$$\rho = \frac{\sqrt{(a^4\ y^2 + b^4\ x^2)^3}}{a^4\ b^4}$$

oder nach gehöriger Transformation vermöge der Relation $a^2\ e^2 = a^2 - b^2$

$$\rho = \frac{\sqrt{(a^2 - e^2\ x^2)^3}}{ab} = \frac{(a^2 - e^2\ x^2)^{3/2}}{a\ b}.$$

Führt man für x den Werth $\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2\ \sin^2\varphi}}$ und für b $a\sqrt{1-e^2}$ ein, so entsteht

$$\rho = \frac{a\ (1-e^2)}{(1-e^2\ \sin^2\varphi)^{3/2}}.$$

Bezeichnet nun G die Länge eines Meridiangrades und ist φ die Polhöhe seiner Mitte, so wird

$$G = \frac{\rho\pi}{180} = \frac{\pi\ a\ (1-e^2)}{180\ (1-e^2\ \sin^2\varphi)^{3/2}}.$$

Ist ψ die Polhöhe der Mitte eines Meridiangrads G', so hat man ebenso

$$G' = \frac{\pi\ a\ (1-e^2)}{180\ (1-e^2\ \sin^2\psi)^{3/2}}.$$

Also entsteht

$$\frac{G}{G'} = \left(\frac{1-e^2\ \sin^2\psi}{1-e^2\ \sin^2\varphi}\right)^{3/2},$$

oder, wenn man für e^2 seinen Werth $\frac{a^2-b^2}{a^2}$ einführt und die Gleichung umgestaltet

$$G\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)^{3/2} = G'\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\psi\right)^{3/2}.$$

Die Entwicklung der einzelnen Potenzen giebt

$$G\left(1 - {}^3/_2\ \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi + {}^3/_8\ \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^2\sin^4\varphi - \ldots\right)$$

$$= G' \left(1 - {}^3/_2 \frac{a^2-b^2}{a^2} \sin^2 \psi + {}^3/_8 \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^2 \sin^4 \psi - \ldots\right),$$

und da die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden können, so wird

$$G - {}^3/_2 \frac{a^2-b^2}{a^2} G \sin^2 \varphi = G' - {}^3/_2 \frac{a^2-b^2}{a^2} G' \sin^2 \psi$$

und mithin

$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{2\,(G' - G)}{3\,(G' \sin^2 \psi - G \sin^2 \varphi)}$$

Da $\frac{a^2-b^2}{a^2}$ gleich $\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a-b}{a}$ und $\frac{a+b}{a}$ sehr nahe 2 ist, so entsteht für die Abplattung

$$\frac{a-b}{a} = \frac{G' - G}{3\,(G' \sin^2 \psi - G \sin^2 \varphi)}.$$

In dem Falle, in welchem der eine der beiden gemessnen Bögen dem Aequator sehr nahe ist, wird die Abplattung

$$\alpha = \frac{G' - G}{3\,G' \sin^2 \psi}.$$

b. Die Formel von Bessel.

Das Integral $s = a\,(1-e^2) \int \frac{d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$ lässt sich leicht auf folgende allgemeine Form bringen:

$s = a\,(1-e^2)\,E\,(\varphi - \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi \ldots)$

(Bessel giebt diese Form und die Bedeutung der einzelnen Coefficienten in den Astr. Nachr. Nr. 333).

Setzt man nun mit Bessel annähernd

$e^2 = 2\alpha$, so wird $E = 1 + {}^3/_2 \alpha$, $\beta = {}^3/_4 \alpha$

und wenn man nun α^2 vernachlässigt

$s = a\,(1 - {}^1/_2 \alpha)\,(\varphi - {}^3/_4 \alpha \sin 2\varphi \ldots\ldots)$.

Ebenso ist für die Polhöhe φ'

$s' = a\,(1 - {}^1/_2 \alpha)\,(\varphi' - {}^3/_4 \alpha \sin 2\varphi' \ldots)$.

Also entsteht

$$s' - s = a\,(1 - {}^1/_2\alpha)\,(\varphi' - \varphi - {}^3/_4\alpha\,(\sin 2\,\varphi' - \sin 2\,\varphi) \ldots)$$

Vermöge der Relation

$$\sin A - \sin B = 2\cos {}^1/_2\,(A+B)\sin {}^1/_2\,(A-B)$$

nimmt dieser Ausdruck die Form an

$$s' - s = a\,(1 - {}^1/_2\alpha)\left\{\varphi' - \varphi - {}^3/_2\alpha\cos(\varphi' + \varphi)\sin(\varphi' - \varphi) \ldots\right\}.$$

Nimmt man nun $\varphi' = \varphi + 1^0$, also $s' - s = g$, so ist die mittlere Länge g eines Meridiangrads

$$g = a\,(1 - {}^1/_2\alpha)\left\{1^0 - {}^3/_2\,\alpha\cos(2\,\varphi + 1^0)\sin 1^0 \ldots\right\}.$$

Ebenso ist dann der unter der Polhöhe ψ gemessne Breitengrad

$$G = a\,(1 - {}^1/_2\alpha)\left\{1^0 - {}^3/_2\alpha\cos(2\,\psi + 1^0)\sin 1^0 \ldots\right\}$$

Damit erhält man, wenn man für $2\varphi + 1^0$ und $2\psi + 1^0$ die Bezeichnungen $\varphi + \varphi'$ und $\psi + \psi'$ wieder einführt

$$\frac{g}{G} = \frac{(1 - {}^1/_2\alpha)\left\{1^0 - {}^3/_2\alpha\cos(\varphi + \varphi')\sin 1^0 \ldots\right\}}{(1 - {}^1/_2\alpha)\left\{1^0 - {}^3/_2\alpha\cos(\psi + \psi')\sin 1^0 \ldots\right\}}$$

oder, wenn man ausmultiplicirt und die mit α^2 behafteten Glieder vernachlässigt,

$$\frac{g}{G} = \frac{1 - {}^1/_2\,\alpha - {}^3/_2\,\alpha\cos(\varphi + \varphi')\,\frac{\sin 1^0}{1^0} \ldots}{1 - {}^1/_2\,\alpha - {}^3/_2\,\alpha\cos(\psi + \psi')\,\frac{\sin 1^0}{1^0} \ldots}$$

Da $\frac{\sin 1^0}{1^0}$ der Einheit gleichgesetzt werden kann, so entsteht, wenn man für

$$\frac{\varphi + \varphi'}{2} \qquad \varphi_0$$

und für

$$\frac{\psi + \psi'}{2} \qquad \psi_0$$

$$\frac{g}{G} = \frac{1 - {}^1/_2\,\alpha - {}^3/_2\,\alpha\cos 2\,\varphi_0}{1 - {}^1/_2\,\alpha - {}^3/_2\,\alpha\cos 2\,\psi_0},$$

oder, da $\cos 2\,\varphi_0 = \cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0 = 1 - 2 \sin^2 \varphi_0$, und ebenso $\cos 2\,\psi_0 = \cos^2 \psi_0 - \sin^2 \psi_0 = 1 - 2 \sin^2 \psi_0$,

$$\frac{g}{G} = \frac{1 - {}^1/_2\,\alpha - {}^3/_2\,\alpha\,(1 - 2\sin^2 \varphi_0)}{1 - {}^1/_2\,\alpha - {}^3/_2\,\alpha\,(1 - 2\sin^2 \psi_0)}$$

$$= \frac{1 - 2\alpha + 3\alpha \sin^2 \varphi_0}{1 - 2\alpha + 3\alpha \sin^2 \psi_0}$$

Subtrahirt man von beiden Seiten die Einheit, so ist

$$\frac{g}{G} - 1 = \frac{g - G}{G} = \frac{3\alpha\,(\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \psi_0)}{1 - 2\alpha + 3\alpha \sin^2 \psi_0)}$$

Schliesslich wird demnach

$$\frac{3\alpha}{1 - 2\alpha + 3\alpha \sin^2 \psi_0} = \frac{g - G}{G\,(\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \psi_0)}$$

Mit Hülfe dieser Formel kann der Abplattungscoefficient α gefunden werden.

Druckfehler.

Pag. 9 Z. 29 v. o. l. *Ῥόδον* anstatt *Ρόδον*.
Pag. 16 Z. 1 v. o. l. *τὸ* anstatt *τὸτὸ*.
Pag. 21 Z. 6 v. o. l. 250040 anstatt 25040.

Fig. 1.

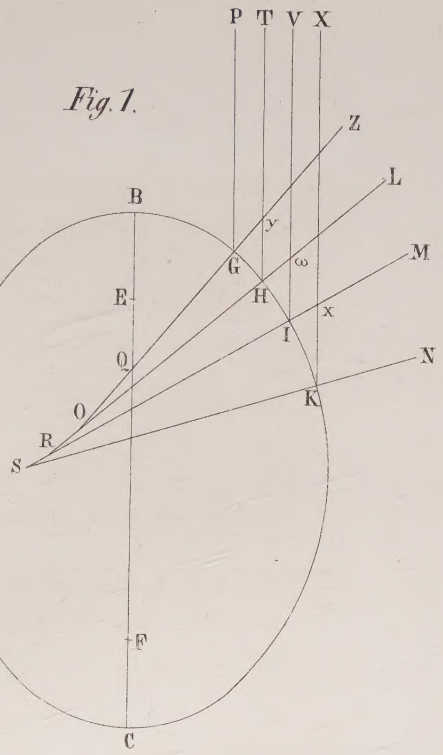


Fig. 3.

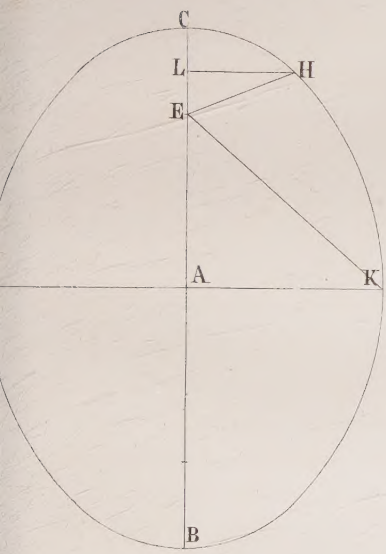
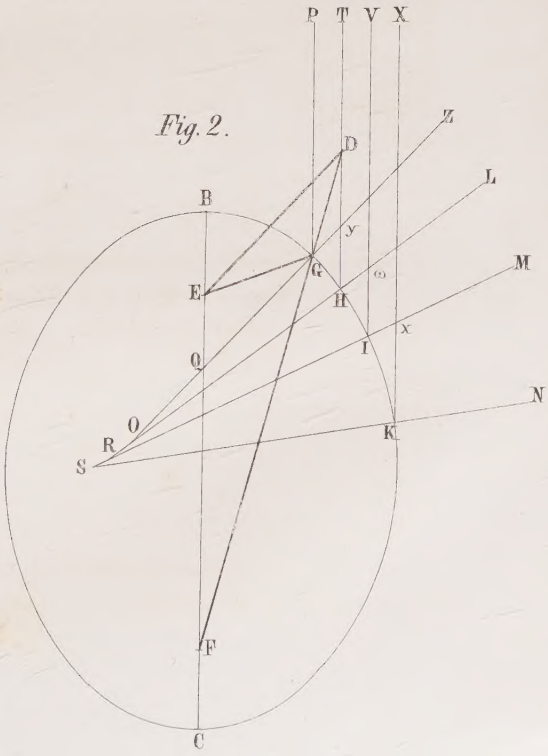


Fig. 2.



Druck von A. Neuenhahn in Jena.